

Komentarz redaktora Ligi do zad. 922

Uznaliśmy (Autor zadania i redaktor Ligi), że wzór $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ jest na tyle znany, żeby zadanie mogło znaleźć się w Lidze. Wzór ma bardzo wiele uzasadnień – wystarczy wstukać w wyszukiwarke: **zeta(2)**, **Basel problem**, czy **sum1/n^2**, by znaleźć sporo pożytecznych odsyłaczy. Problem w tym, że dowody, jakie się pojawiają (niektóre bardzo krótkie) odwołują się do faktów z analizy matematycznej znacznie bardziej zaawansowanej. Dlatego wydaje się sensowne pokazanie dowodu bardzo elementarnego; tu wystarczy wiedza szkolna i minimalne oswojenie z liczbami zespolonymi.

Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy wielomian F (o wartościach zespolonych) dany wzorem

$$F(x) = (x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

To funkcja parzysta (banalne sprawdzenie), skąd wniosek, że istnieje taki wielomian P , że $F(x) = P(x^2)$. Rozwijamy dwumiany $(x \pm i)^{2n+1}$ i zapisujemy F oraz P w postaci

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax^{2n} + Bx^{2n-2} + [\dots] \quad ([\dots]: \text{ składniki niższych stopni}); \\ A &= \binom{2n+1}{1}(i - (-i)) = 2i(2n+1), \quad B = \binom{2n+1}{3}(i^3 - (-i)^3) = -\frac{2}{3}in(4n^2 - 1); \\ P(x) &= Ax^n + Bx^{n-1} + [\dots]. \end{aligned}$$

Wyznamy dodatnie miejsca zerowe funkcji F (więc i P), stosując podstawienie $x = \operatorname{ctg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$). Równanie $F(\operatorname{ctg} \alpha) = 0$, czyli $(\operatorname{ctg} \alpha + i)^{2n+1} = (\operatorname{ctg} \alpha - i)^{2n+1}$, przekształcamy do kolejno równoważnych postaci (używając wzoru de Moivre'a):

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n+1} &= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^{2n+1}; \\ \cos(2n+1)\alpha + i \sin(2n+1)\alpha &= \cos(2n+1)\alpha - i \sin(2n+1)\alpha. \end{aligned}$$

Uzyskane równanie $\sin(2n+1)\alpha = 0$ ma dla $\alpha \in (0, \pi/2)$ rozwiązania $\alpha_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ ($k = 1, \dots, n$). Tak więc liczby $\operatorname{ctg} \alpha_k$ są pierwiastkami wielomianu F , a ich kwadraty – pierwiastkami wielomianu P . Stąd

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \dots + \operatorname{ctg}^2 \alpha_n = -\frac{B}{A} = \frac{n(2n-1)}{3} \quad (\text{wzór Viète'a}).$$

Ponieważ $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ dla $\alpha \in (0, \pi/2)$, zatem

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha_k < \frac{1}{\alpha_k^2} < \frac{1}{\sin^2 \alpha_k} = \operatorname{ctg}^2 \alpha_k + 1.$$

Sumowanie (po $k = 1, \dots, n$) daje dwustronne oszacowanie

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k\pi} \right)^2 < \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n^2 + 2n}{3};$$

po pomnożeniu przez π^2 i podzieleniu przez $(2n+1)^2$:

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2n^2 - n}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2n^2 + 2n}{3}.$$

Skrajne wyrażenia dążą (przy $n \rightarrow \infty$) do granicy $\pi^2/6$, która wobec tego jest też granicą sumy $\sum_{k=1}^n k^{-2}$.

Uwaga. „Zsumowany” został szereg harmoniczny rzędu dwa. Czy to znaczy, że znamy jego sumę? Odpowiedź zależy od tego, czy uważamy, że *znamy* liczbę π . Tak naprawdę, to *znamy* tylko odcinek jej rozwinięcia dziesiętnego, czyli przedstawienia w formie szeregu ułamków o mianownikach $10, 10^2, 10^3, \dots$. Tak więc wzór $\sum n^{-2} = \pi^2/6$ należy odczytać jedynie jako równość sum dwóch szeregów. Przy tym nikt nie wie, jaka jest np. trylionowa cyfra rozwinięcia π ; natomiast dokładnie wiadomo, jaki jest trylionowy składnik szeregu $\sum n^{-2}$; co wskazuje, że wartość jego sumy jest lepiej określona przez sam ten szereg niż przez jej nazwanie: pi kwadrat dzielone przez sześć.

W kontekście powyższych rozważań przyjmujemy, że do otrzymania oceny maksymalnej za rozwiązanie zadania nie jest niezbędne podanie wyniku $\pi^2/6$. Uznany będzie każdy (uzyskany z uzasadnieniem) wynik w dowolnej z postaci:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$, *suma szeregu harmonicznego rzędu dwa*, **zeta(2)** lub $\zeta(2)$ (i inne, równoważne).

Redaktor Ligi zadaniowej