

Komentarz do zadania 921

Treść zadania: *W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości CD . Punkt E leży wewnątrz tego trójkąta i zachodzą związki: $AC > BC = BE$, $CD^2 = AD \cdot BD$. Dwusieczna kąta AED połowi bok AB . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości miary kąta ABC .*

Pierwsze zdanie rozwiązania firmowego: *Z założeń o długościach odcinków wynika, że kąt BCA jest prosty.* Nie wynika – już tu błąd. Owszem, wynika, gdy D leży na odcinku AB ; wtedy kąt ABC jest ostry; dalszy ciąg rozwiązania firmowego pokazuje, że wówczas $\angle ABC = 60^\circ$. Taka była zamierzona treść zadania.

Spojrzenie na przysłane prace uświadomiło redaktorowi, że punkt D może leżeć na przedłużeniu odcinka AB poza B . Możliwe miary kąta ABC (rozwartego) wypełniają wtedy pewien przedział wartości. Ustalenie jego końców było utrudnione przez żądanie, by punkt E trafił do wnętrza trójkąta ABC , co wymagało uciążliwych rachunków.

Kilku uczestników podjęło to wyzwanie (zapewne w pełnej świadomości braku w nim sensu). Jedni przytoczyli cały rachunek (często wsparty programem obliczeniowym), inni podali tylko przybliżone wartości ograniczające ów przedział (z góry i z dołu), ze szkicem uzasadnienia/agitacji. Ten trud należało uhonorować – oceną maksymalną (lub prawie).

Pozostali nie zauważyli (jak firmówka) konfiguracji $[B$ między $A, D]$ i przedstawili dobre rozwiązanie zadania *zamierzonego*. Otrzymali oceny dodatnie, i to spore – dlatego, że takie zadanie samo w sobie jest ciekawe i stanowi znaczący podprzypadek zadania „pełnego” – ale też dlatego, że początek treści zadania (*W trójkącie ABC punkt D jest...*) mógł zostać interpretowany jako niedopowiedziane założenie, że D jest punktem tego trójkąta (z brzegiem).

Na kolejnych stronach pokazujemy dwa rozwiązania, pochodzące od uczestników (kres dolny wartości badanego kąta to w jednej pracy $\pi - \arccos \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$, w drugiej $\pi - \arctg \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$, ale to ta sama liczba).

Redaktor Ligi Zadaniowej (mat.)

Zadanie 921.

Odpowiedź: Możliwe wartości kąta ABC to $\angle B = 60^\circ$ oraz (w przybliżeniu) $111.5^\circ \leq \angle B \leq 112.8^\circ$ (szczegóły w drugiej części).

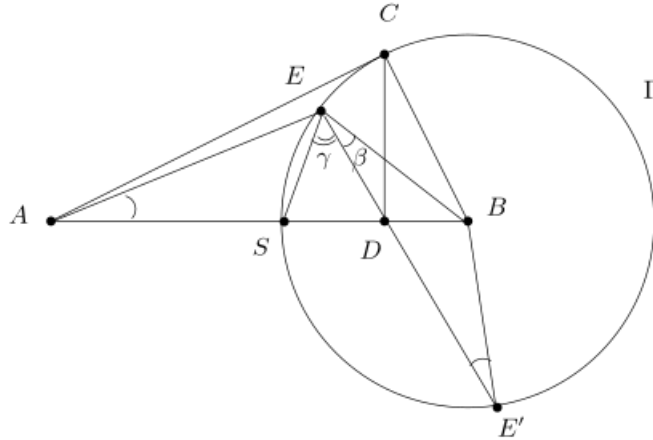
Ponieważ $AD/CD = CD/DB$, trójkąty prostokątne CDB i ADC są podobne. Oznaczmy przez α kąt taki, że

$$\angle CBD = \angle ACD = \alpha, \quad \angle BCD = \angle CAD = 90^\circ - \alpha.$$

Niech Γ oznacza okrąg o środku B i promieniu BC . Leży na nim punkt E . Niech również M oznacza środek odcinka AB . Ponieważ $AC > BC$, mamy dwie możliwości: punkt D znajduje się na odcinku AB (gdy kąt $\angle B$ jest ostry), lub punkt D znajduje się na przedłużeniu prostej AB poza punkt B (gdy kąt $\angle B$ jest rozwarty). Rozpatrzmy je oddzielnie.

Przypadek $D \in AB$. Wtedy $\angle C = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$. Niech $S = \Gamma \cap AB$ i niech E' będzie drugim punktem przecięcia prostej ED i okręgu Γ . Twierdzimy, że prosta ES jest dwusieczną kąta AED . Oznaczmy

$$\beta = \angle BED, \quad \gamma = \angle SED.$$



Ponieważ trójkąty $E'BE$ i EBS są równoramienne, więc

$$\angle BE'D = \beta, \quad \angle BSE = \angle BES = \gamma + \beta.$$

CD jest prostą potęgową okręgu Γ i okręgu o środku M opisanego na trójkącie ABC , więc dla punktu D mamy równość potęg:

$$DE \cdot DE' = DA \cdot DB,$$

co oznacza, że punkty A, E, B, E' leżą na okręgu. Wobec tego $\angle EAB = \angle EE'B = \beta$, a stąd prostym rachunkiem w trójkącie AES mamy

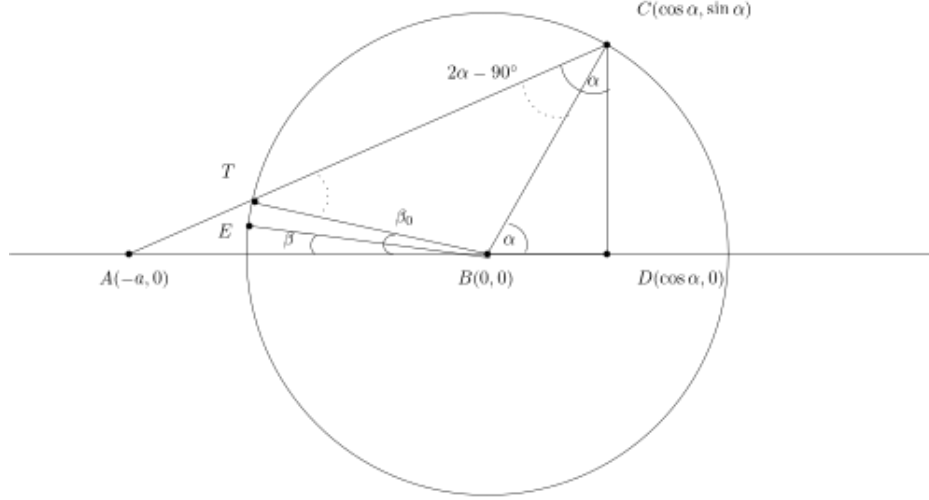
$$\angle AES = 180^\circ - \beta - (180^\circ - (\gamma + \beta)) = \gamma,$$

więc istotnie ES jest dwusieczną kąta AED .

Odpowiadając na pytanie z zadania, skoro dwusieczna kąta AED zawsze przechodzi przez S , to połowi ona bok AB wtedy i tylko wtedy gdy $S = M$, czyli $AB = 2 \cdot BC$, a więc gdy

$\angle B = 60^\circ$. W tym wypadku każdy punkt E wybrany na łuku $CM = CS$ okręgu Γ daje pożądaną konfigurację.

Przypadek $B \in AD$. Umieśćmy całą konfigurację w układzie współrzędnych tak, że $B = (0, 0)$ i $BC = 1$, a co za tym idzie $C = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ i $D = (\cos \alpha, 0)$. Niech wierzchołek A znajduje się po ujemnej stronie osi OX i $A = (-a, 0)$



Niech $T = \Gamma \cap AC$ i $\beta_0 = \angle TBA$. Punkt E jest położony na okręgu Γ tworząc kąt $\angle EBA = \beta$, spełniający $0 < \beta < \beta_0$. W szczególności $E = (-\cos \beta, \sin \beta)$. Graniczny kąt β_0 można obliczyć rachując po kolei:

$$\angle ABC = 180^\circ - \alpha, \quad \angle ACB = \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ,$$

i dalej ponieważ trójkąt TBC jest równoramienny:

$$\angle TBC = 180^\circ - 2(2\alpha - 90^\circ) = 360^\circ - 4\alpha,$$

$$\beta_0 = (180^\circ - \alpha) - (360^\circ - 4\alpha) = 3\alpha - 180^\circ.$$

W szczególności $\alpha \geq 60^\circ$, w przeciwnym razie okrąg Γ nie przecina boku AC i punktu E w ogóle nie ma. Dalej, w trójkącie ADC :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{DC} = \frac{a + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \implies a = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej prosta EM jest dwusieczną kąta AED wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AM}{MD} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AB + BD} = \frac{AB}{AB + 2BD} = \frac{a}{a + 2 \cos \alpha} = 1 - 2 \cos^2 \alpha,$$

lub inaczej

$$EA^2 = (1 - 2 \cos^2 \alpha)^2 ED^2.$$

Następujące długości obliczamy bezpośrednio:

$$EA^2 = (a - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta = a^2 - 2a \cos \beta + 1,$$

$$ED^2 = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + 1.$$

Z tych zależności możemy wyznaczyć $\cos \beta$ w zależności od $\cos \alpha$. Pomijając rachunki przytoczymy tylko ostateczny wynik: jeżeli oznaczymy $x = \cos \alpha$, to:

```
# Równania:
x, cosb = var('x cosb')
a = (1-2*x^2)/x
EA2 = a^2-2*a*cosb+1
ED2 = x^2+2*x*cosb+1
solve(EA2 == (1-2*x^2)^2 * ED2, cosb)

# Rozwiązanie:
[cosb == -1/2*(4*x^6 + 4*x^4 - 3*x^2 + 1)/(4*x^5 - x)]
czyli:
```

$$\cos \beta = \frac{4x^6 + 4x^4 - 3x^2 + 1}{2x(1 - 4x^4)}.$$

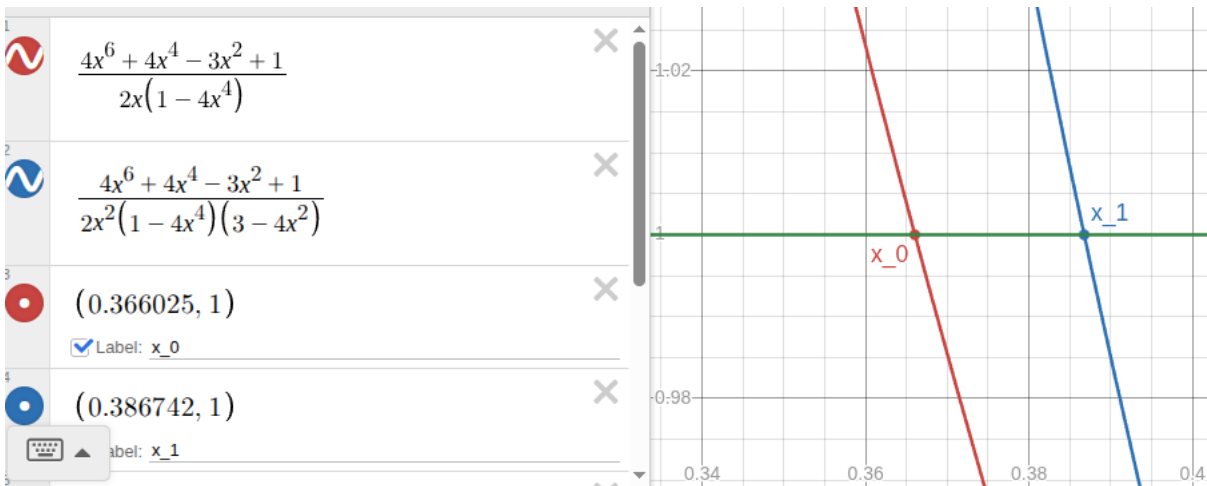
Ponieważ $0 < \beta < \beta_0 = 3\alpha - 180^\circ$, więc

$$x(3 - 4x^2) = \cos(3\alpha - 180^\circ) < \cos \beta < 1.$$

Reasumując, punkt E o wymaganej własności istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki

$$x(3 - 4x^2) < \frac{4x^6 + 4x^4 - 3x^2 + 1}{2x(1 - 4x^4)} < 1$$

i $0 < x \leq \frac{1}{2}$ (bo $\alpha \in [60^\circ, 90^\circ)$). (Jeżeli zachodzi tylko prawa nierówność to punkt E nadal będzie istniał na okręgu Γ ale poza wnętrzem trójkąta ABC). W tym momencie posłużymy się już wykresem i obliczeniami numerycznymi.



Prawa nierówność ma pierwiastek $x_0 \approx 0.366$ i jest spełniona dla $x > x_0$. (Wolfram Alpha twierdzi $x_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$). Lewa ma pierwiastek $x_1 \approx 0.387$ i jest spełniona dla $x < x_1$ (z lewej strony mamy równanie algebraiczne stopnia 6 tylko z parzystymi potęgami, a więc również mające rozwiązanie przez pierwiastniki). Ostatecznie $x_0 < x < x_1$, co daje

$$68.5^\circ \approx \arccos(x_0) > \alpha > \arccos(x_1) \approx 67.2^\circ$$

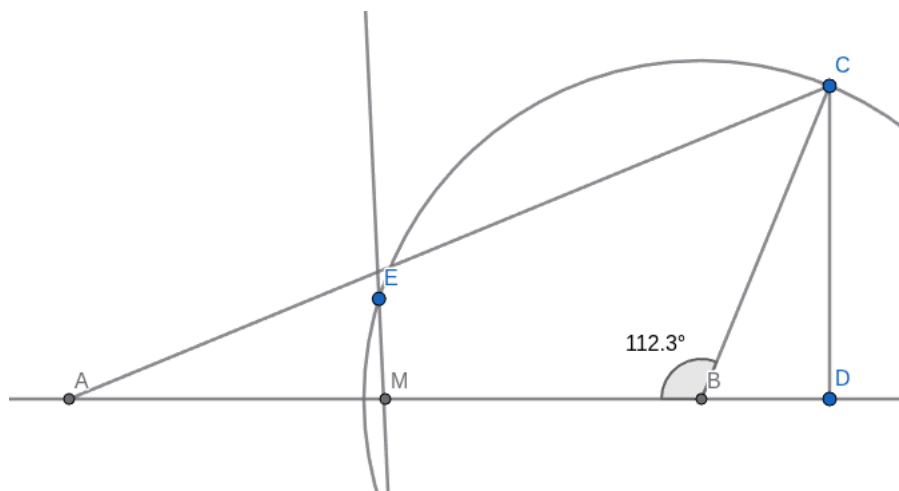
a więc

$$111.5^\circ \leq \angle B = 180^\circ - \alpha \leq 112.8^\circ$$

a dokładnie

$$\angle B \in (180^\circ - \arccos(x_0), 180^\circ - \arccos(x_1)).$$

Przykład:



Rozwiązanie zadania 921

Arkadiusz Krupa z Zaborza

Bez straty ogólności możemy przyjąć wartości dla punktów A oraz B oraz zdefiniować inne punkty następująco.

$$A = (0, 0) \quad B = (2, 0) \quad O = (1, 0) \quad D = (d, 0) \quad C = (d, c) \quad E = (x, y)$$

Założymy także, że trójkąt znajduje się w górnej połowie płaszczyzny ($c \geq 0$). Warunek $AC > BC$ pociąga za sobą $d > 1$.

Rozważmy przypadek $d < 2$. Wtedy $c^2 = d(2-d)$. Pole trójkąta AEO można wyrazić na dwa sposoby:

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot \sin(\sphericalangle AEO) \cdot AE \cdot EO$$

Podobnie, pole trójkąta DEO można wyrazić na dwa sposoby:

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot \sin(\sphericalangle DEO) \cdot DE \cdot EO$$

Zachodzi $\sphericalangle AEO = \sphericalangle DEO$, a zatem mamy:

$$AO \cdot DE = DO \cdot AE$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu:

$$(d-1)^2 \cdot (x^2 + y^2) = (x-d)^2 + y^2$$

Po podzieleniu przez d (można, bo $d > 0$):

$$(d-2) \cdot (x^2 + y^2) = d - 2x$$

Po podzieleniu przez $d-2$ (można, bo $d < 2$) i uproszczeniu:

$$\left(x + \frac{1}{d-2}\right)^2 + y^2 = \frac{d}{d-2} + \left(\frac{1}{d-2}\right)^2 = \left(\frac{d-1}{2-d}\right)^2$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(\frac{1}{2-d}, 0)$ i promieniu $\frac{d-1}{2-d}$. Rzut tego okręgu na oś OX to przedział $[1, \frac{d}{2-d}]$.

Warunek $EB = BC$ wygląda następująco:

$$(x-2)^2 + y^2 = (d-2)^2 + c^2 = 4 - 2d$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu $\sqrt{4-2d}$. Rzut tego okręgu na oś OX to przedział $[2 - \sqrt{4-2d}, 2 + \sqrt{4-2d}]$. Zdefiniujmy a oraz b następująco:

$$a = \frac{d}{2-d} - 2, \quad b = \sqrt{4-2d}, \quad c = (a^2 - b^2)(2-d)^2$$

Mamy:

$$c = (3d-4)^2 - (4-2d)(2-d)^2 = d^2(2d-3)$$

Znak c jest taki sam jak znak $a-b$. Dla $d = \frac{3}{2}$ okręgi pokrywają się. Dla $d > \frac{3}{2}$ zachodzi:

$$1 < 2 - \sqrt{4-2d} < 2 + \sqrt{4-2d} < \frac{d}{2-d}$$

a zatem okrąg drugi znajduje się wewnątrz pierwszego, a punkt E mający leżeć na ich przecięciu nie może istnieć. Dla $d < \frac{3}{2}$ zachodzi:

$$2 - \sqrt{4-2d} < 1 < \frac{d}{2-d} < 2 + \sqrt{4-2d}$$

a zatem okrąg pierwszy znajduje się wewnątrz drugiego, a punkt E mający leżeć na ich przecięciu nie może istnieć. Wartość $d = \frac{3}{2}$ odpowiada wartości $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kąt ABC ma wtedy wartość 60° .

Dla $d = 2$ zachodzi $c = 0$, a zatem punkty ABC nie tworzą trójkąta. Rozważmy zatem przypadek $d > 2$. W tym przypadku mamy $c = \sqrt{d(d-2)}$. Pierwszy okrąg dla tego przypadku ma środek w punkcie $(-\frac{1}{d-2}, 0)$ i promień $\frac{d-1}{d-2}$. Przecina on bok AB w punkcie $(1, 0)$. Równanie drugiego okręgu ma postać:

$$(x-2)^2 + y^2 = (d-2)^2 + c^2 = 2(d-1)(d-2)$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu $\sqrt{2(d-1)(d-2)}$. Punkt E leży na przecięciu tych okręgów oraz wewnątrz trójkąta ABC . Aby okręgi przecinały się wewnątrz trójkąta muszą zachodzić i wystarczają następujące warunki:

- drugi okrąg musi przecinać bok AB między $(0, 0)$ a $(1, 0)$, a zatem $1 < BC < 2$
- okrąg pierwszy przecina bok AC dla niższego argumentu niż okrąg drugi

Pierwszy warunek (po podniesieniu do kwadratu i uproszczeniu nierówności) przyjmuje postać

$$1 < 2d^2 - 6d + 4 < 4$$

A zatem (w połączeniu z faktem, że $d > 2$ mamy:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} < d < 3$$

Niech (x_1, y_1) będzie punktem przecięcia pierwszego okręgu z bokiem AC . Mamy:

$$y_1^2 = x_1^2 \cdot \frac{c^2}{d^2} = x_1^2 \cdot \frac{d-2}{d}$$

Po podstawieniu:

$$\left(x_1 + \frac{1}{d-2}\right)^2 + x_1^2 \frac{d-2}{d} = \frac{(d-1)^2}{(d-2)^2}$$

Dalej:

$$\begin{aligned} x_1^2 \frac{2(d-1)}{d} + 2x_1 \cdot \frac{1}{d-2} + \frac{1}{(d-2)^2} &= \frac{(d-1)^2}{(d-2)^2} \\ x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{d}{2(d-1)(d-2)} + \frac{d}{2(d-1)(d-2)^2} &= \frac{d(d-1)}{2(d-2)^2} \\ \left(x_1 + \frac{d}{2(d-1)(d-2)}\right)^2 + \frac{d}{2(d-1)(d-2)^2} - \frac{d^2}{(2(d-1)(d-2))^2} &= \frac{d(d-1)}{2(d-2)^2} \\ \left(x_1 + \frac{d}{2(d-1)(d-2)}\right)^2 &= \frac{2d(d-1)^3 + d^2 - 2d(d-1)}{4(d-1)^2(d-2)^2} = \frac{d^2(2d^2 - 6d + 5)}{4(d-1)^2(d-2)^2} \end{aligned}$$

Stąd mamy (chodzi nam o dodatnie rozwiązanie):

$$x_1 = \frac{d}{2(d-1)(d-2)} \left(\sqrt{2d^2 - 6d + 5} - 1 \right)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem jest większe od 1 dla $d > 2$.

Niech (x_2, y_2) będzie punktem przecięcia drugiego okręgu z bokiem AC . Mamy:

$$y_2^2 = x_2^2 \cdot \frac{c^2}{d^2} = x_2^2 \cdot \frac{d-2}{d}$$

oraz

$$(x_2 - 2)^2 + y_2^2 = 2(d-1)(d-2)$$

Dalej:

$$\begin{aligned} x_2^2 \left(1 + \frac{d-2}{d}\right) - 4x_2 + 4 &= 2(d-1)(d-2) \\ x_2^2 \left(\frac{2d-2}{d}\right) - 4x_2 + 4 &= 2(d^2 - 3d + 2) \\ x_2^2 \left(\frac{2d-2}{d}\right) - 4x_2 + 4 &= 2(d^2 - 3d + 2) \\ x_2^2 \left(\frac{2d-2}{d}\right) - 4x_2 &= 2(d^2 - 3d) \\ x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{d}{d-1} &= \frac{d(d^2 - 3d)}{d-1} \end{aligned}$$

$$\left(x_2 - \frac{d}{d-1}\right)^2 = \frac{d^2(d-3)}{d-1} + \frac{d^2}{(d-1)^2} = \frac{d^2(d-2)^2}{(d-1)^2}$$

Równanie to ma dwa rozwiązania. Jednym z nich jest d (bo punkt C leży na drugim okręgu i leży na boku AC). Nam chodzi o to drugie, mniejsze:

$$x_2 = \frac{d}{d-1} - \frac{d(d-2)}{d-1} = \frac{d(3-d)}{d-1}$$

Szukamy takich wartości d dla których $x_1 < x_2$. Mamy:

$$\frac{d}{2(d-1)(d-2)} \left(\sqrt{2d^2 - 6d + 5} - 1 \right) < \frac{d(3-d)}{d-1}$$

Równoważnie:

$$\frac{1}{2(d-2)} \left(\sqrt{2d^2 - 6d + 5} - 1 \right) < 3 - d$$

$$\sqrt{2d^2 - 6d + 5} < 2(d-2)(3-d) + 1$$

Obie strony są dodatnie, a więc możemy podnieść stronami do kwadratu zachowując równoważność:

$$2d^2 - 6d + 5 < (2(d-2)(3-d) + 1)^2 = (-2d^2 + 10d - 11)^2$$

Równoważnie

$$2d^2 - 6d + 5 < 4d^4 - 40d^3 + 144d^2 - 220d + 121$$

$$4d^4 - 40d^3 + 142d^2 - 214d + 116 > 0$$

$$2(d-2)(2d^3 - 16d^2 + 39d - 29) > 0$$

Z uwagi na fakt, że $d > 2$ równoważnie:

$$2d^3 - 16d^2 + 39d - 29 > 0$$

Powyższy wielomian ma miejsce zerowe $z \approx 2,427$. W przedziale $(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, z)$ przyjmuje dodatnie wartości, a w przedziale $(z, 3)$ ujemne. Zatem dla $d \in (\frac{3+\sqrt{3}}{2}, z)$ okręgi przecinają się wewnątrz trójkąta, w innym przypadku (ograniczając się do $d > 2$) nie. Dla $d > 2$ kąt ABC wyraża się wzorem:

$$\sphericalangle ABC = \pi - \arctan\left(\frac{c}{d-2}\right) = \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{d}{d-2}}\right)$$

Pamiętając o tym, że funkcja przypisująca wartości d kąt $\sphericalangle ABC$ jest rosnącą ostatecznie rozwiązanie to następujący zbiór:

$$\left\{\frac{\pi}{3}\right\} \cup \left(\pi - \arctan\sqrt{3+2\sqrt{3}}, \pi - \arctan\sqrt{\frac{z}{z-2}}\right)$$