# Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

## Jan DEREZIŃSKI

Autor jest uczniem XIV Liceum Ogólnokształcącego im. K. Gottwalda w Warszawie, zwycięzcą XXV Krajowej Olimpiady Matematycznej.

Gospodarzem tegorocznej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej była Niemiecka Republika Demokratyczna. Do Erfurtu, stolicy Turyngii, przyjechała nasza drużyna 6 lipca. Tam też, 8 lipca, odbyła się oficjalna inauguracja Olimpiady.
Na rozwiązanie sześciu zadań mieliśmy do dyspozycji dziewięć godzin rozłożonych na dwa dni. W opinii większości uczestników najłatwiejsze były zadania 1 i 4. Pozostałe okazały się znacznie trudniejsze, ale interesujące. Niektóre z problemów miały całkiem zaskakujące, nieszablonowe rozwiązania. Na przykład w zadaniu 3 konstrukcja odpowiedniego ciągu rekurencyjnego pomagała doskonale w dowodzie podzielności sumy przez 5. Istniały również kapitalne rozwiązania ostatnich zadań, zajmujące dosłownie kilkanaście linijek, choć niektóre prace na te tematy osiągnęły monstrualne rozmiary.
Bezpośrednio po zawodach członkowie komisji przystąpili do sprawdzania i oceniania naszych prac. W tym czasie wszystkie drużyny zwiedzały NRD. Oglądaliśmy Erfurt, Weimar, zamek Wartburg, Poczdam i Berlin. Nawiązaliśmy bardzo wiele znajomości i przyjaźni. Kontaktom towarzyskim sprzyjały wspólne wycieczki oraz wymiana problemów matematycznych. Wielki rozgłos i uznanie zdobyło jedno z zadań polskiej drużyny. Brzmiało ono następująco:
Dowieść, że dla każdego naturalnego $n$ większego od 17 spełniona jest nierówność

$$\prod_{\substack{i \neq j\\ i=1\\ j=1}}^{n} \left| \sqrt[i]{i} - \sqrt[j]{j} \right| \leqslant \frac{1}{\pi \; n!}.$$

Trzeba przyznać, że Olimpiada zorganizowana została wzorowo. Organizatorzy starali się zapoznać nas z krajem i jego problemami. Urządzono spotkania z niemiecką młodzieżą. Na cześć niektórych moich kolegów urządziły przyjęcia rodziny poznanych przez nich niemieckich koleżanek. Niemieccy dziennikarze interesowali się wrażeniami uczestników Olimpiady. Cały artykuł w niemieckiej prasie, składający się z kilkunastu mini-wywiadzików, został zatytułowany cytatem z wypowiedzi Marka Lewkowicza: *Czuliśmy się jak u starych przyjaciół*, co trafnie oddaje serdeczność, jaką nas otaczano.
15 lipca, w Berlinie, odbyło się uroczyste zakończenie Olimpiady, połączone z uhonorowaniem zwycięzców. Z naszej drużyny Wiesław Bek i Andrzej Turski zdobyli nagrody trzeciego stopnia. Drużynowo zajęliśmy czternaste miejsce tuż za drużyną Demokratycznej Republiki Wietnamu. Startowała ona pierwszy raz, w niepełnym składzie, wykazując znakomite umiejętności i zdolności. Drugi debiutant Olimpiady, Stany Zjednoczone, także odniósł sukces — zajął drugie miejsce. Zwycięzcą została drużyna Związku Radzieckiego.
Następna Olimpiada Matematyczna odbędzie się w Bułgarii albo Mongolii. Ciekawe, jak tam wypadną Polacy.

### XVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna — Zadania

1. Trzej gracze $A$, $B$, $C$ używają do gry trzech kart. Na każdej z tych kart napisana jest liczba całkowita na jednej — liczba $p$, na drugiej $q$, na trzeciej $r$, przy czym $0 < p < q < r$. Każda tura gry przebiega następująco: karty tasuje się i daje każdemu graczowi po jednej, następnie każdy gracz bierze tyle żetonów, ile wynosi liczba na otrzymanej karcie, po czym karty zbiera się, a żetony pozostają u graczy. Odbyło się $N$ tur ($N \geqslant 2$). Po zakończeniu gry gracz $A$ miał 20 żetonów, gracz $B$ — 10 żetonów, gracz $C$ — 9 żetonów. W ostatniej turze gracz $B$ wziął $r$ żetonów. Kto otrzymał $q$ żetonów w pierwszej turze?
2. Udowodnić, że w trójkącie $ABC$ istnieje taki punkt $D$ na boku $\overline{AB}$, że $CD$ jest średnią geometryczną $AD$ i $DB$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sin A \cdot \sin B \leqslant \left(\sin \frac{C}{2}\right)^2.$$

3. Udowodnić, że dla żadnej liczby naturalnej $n$ liczba $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$ nie dzieli się przez 5.

4. Rozpatrujemy rozkłady szachownicy $8 \times 8$ na $p$ niezachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:
1) każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych,
2) Jeżeli $a_i$ jest liczbą białych pól w $i$-tym prostokącie, to $a_1 < a_2 < \dots a_p$.
Znaleźć największą wartość $p$, przy której jest możliwy taki rozkład i wyznaczyć dla tej wartości $p$ wszystkie ciągi $a_1, a_2, \dots, a_p$, dla których można taki rozkład zrealizować.
5. Znaleźć zbiór wartości sumy

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

gdzie $a$, $b$, $c$, $d$ są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.
6. Niech $P$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych różnym od funkcji stałej, zaś $n(P)$ niech będzie liczbą wszystkich różnych liczb całkowitych $k$, dla których $[P(k)]^2 = 1$. Udowodnić, że $n(P) - \deg(P) \leqslant 2$, gdzie $\deg(P)$ jest stopniem wielomianu $P$.

**Rozwiązanie zadania M50.**
Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$(*) \qquad x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2].$$

Podstawiając w tej tożsamości $x = a$, $y = b\sqrt[3]{5}$, $z = c\sqrt[3]{25}$ otrzymujemy

$$a^3+5b^3+25c^3-15abc = \left(a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}\right)\left(a^2+b^2\sqrt[3]{25}+5c^2\sqrt[3]{5}-ab\sqrt[3]{5}-5bc-ac\sqrt[3]{25}\right),$$

skąd

$$(**) \qquad \frac{1}{a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}} = \frac{a^2-5bc}{M} + \frac{5c^2-ab}{M}\sqrt[3]{5} + \frac{b^2-ac}{M}\sqrt[3]{25},$$

gdzie $M = a^3+5b^3+25c^3-15abc$, jest liczbą wymierną. Wobec tego każde z otrzymanych wyrażeń ułamkowych jest liczbą wymierną.
Należy jeszcze wykazać, że można było dzielić przez $M$, czyli że $M \neq 0$. Gdyby bowiem $M = 0$, to z drugiej części tożsamości (*) wobec $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25} \neq 0$ wynikałoby, że drugi czynnik jest równy zeru, co jest możliwe tylko dla $x = y = z$, czyli dla $a = b\sqrt[3]{5} = c\sqrt[3]{25}$. Wobec niewymierności $\sqrt[3]{5}$ równość $a = b\sqrt[3]{5}$ zachodzi tylko dla $a = b = 0$, skąd wynika, że $c = 0$, co przeczy założeniu, że liczba $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$ jest różna od zera.
Przeprowadzone rozumowanie daje sposób znoszenia niewymierności w mianowniku liczb występujących po lewej stronie równości (**).