O liczbach zespolonych i wielokątach foremnych

Prof. dr Julian ŁAWRYNOWICZ

Karol Fryderyk Gauss (1777–1855), matematyk niemiecki

Posługując się w szkole liczbami rzeczywistymi i wykonując na nich działania mówimy zwykle, że pierwiastek kwadratowy z (-1) nie istnieje. Dokładniej należałoby powiedzieć, że wśród liczb rzeczywistych nie ma takiej liczby, której kwadrat równy jest -1.

Jedna z metod wprowadzenia liczb zespolonych polega na powiększeniu zbioru liczb rzeczywistych o pierwiastek z (-1), tj. o taką liczbę i, że $i^2 = -1$. Wówczas za liczby zespolone uważamy wszystkie dwumiany postaci $a+bi$, gdzie a oraz b są liczbami rzeczywistymi.

Praktyczna potrzeba takich liczb powstaje np. przy rozwiązywaniu równania stopnia trzeciego $x^3+px+q = 0$, którego rozwiązanie x_1 dane wzorem

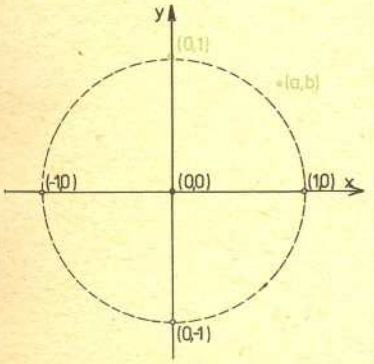
$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}}$$

jest liczbą rzeczywistą również w tzw. przypadku nieprzywiedlnym, gdy $\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2 < 0$.

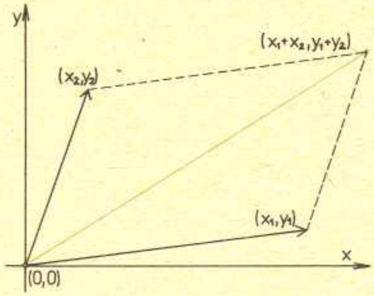
Posłużymy się inną metodą wprowadzenia liczb zespolonych, pochodzącą od Karola Fryderyka Gaussa (przełom XVIII i XIX wieku). Liczbę $a+bi$ uważamy tu za punkt (x, y) płaszczyzny, którego współrzędne wynoszą $x = a$, $y = b$. Mówiąc językiem algebraicznym, liczbą zespoloną nazywamy każdą parę uporządkowaną (x, y) liczb rzeczywistych x, y; przyjmujemy przy tym następujące definicje równości, sumy i iloczynu:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2,$$

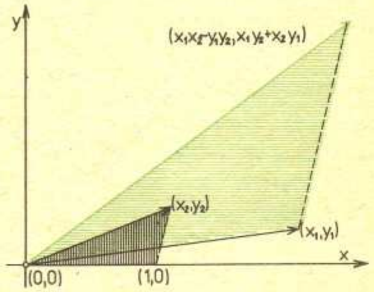
$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2), \qquad (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$



Liczby zespolone jako punkty na płaszczyźnie



Dodawanie liczb zespolonych



Mnożenie liczb zespolonych.
Uwaga: zakreskowane trójkąty są podobne (udowodnijcie!).

Różnicę i iloraz dwu liczb zespolonych (x_1, y_1), (x_2, y_2) definiujemy odpowiednio jako rozwiązania równań

$$(x_2, y_2)+(x, y) = (x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2)\cdot(x, y) = (x_1, y_1),$$

przy czym w przypadku ilorazu zakładamy, że $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$.

Przyporządkowanie każdej parze $(x, 0)$ liczby rzeczywistej x jest różnowartościowe, co więcej, zdefiniowane wyżej działania dla liczb postaci $(x, 0)$ dają analogiczne rezultaty do (zwykłych) działań na liczbach rzeczywistych. Uzasadnia to nierozróżnianie w dalszym ciągu liczb $(x, 0)$ i x. Wprowadzając zatem oznaczenie $i = (0, 1)$ (jednostka urojona) otrzymujemy $(x, y) = x+iy$. Liczby rzeczywiste x, y nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą (po łacinie *pars realis*) i urojoną (po łac. *pars imaginaria*) liczby $z = x+iy$ pisząc $x = \operatorname{re} z$, $y = \operatorname{im} z$. Liczbę $\bar{z} = x-iy$ nazywamy sprzężoną z liczbą $z = x+iy$.

Liczbę $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ nazywamy modułem (lub wartością bezwzględną) liczby z, każdą zaś liczbę $\vartheta = \operatorname{Arg} z$ taką, że $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ — argumentem (lub amplitudą) liczby z. Dla $z \neq 0$ w przedziale $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$ istnieje dokładnie jeden argument; nazywamy go argumentem głównym liczby z i oznaczamy symbolem $\arg z$. Pisząc $z = r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ stwierdzamy, że $z^n = r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)$ oraz że istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-go stopnia z liczby $z \neq 0$:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

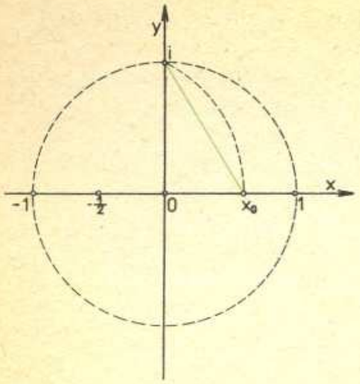
przy czym pierwiastkowanie zdefiniowano jako działanie „odwrotne” do potęgowania: $[(\sqrt[n]{z})_k]^n = z$.

Pierwiastki każdego równania

$$z^n = R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

wyznaczają wierzchołki n-kąta foremnego o środku w początku układu. Wielokąty te mogą być wypukłe lub wklęsłe (gwiaździste). Odwrotnie, każdemu takiemu wielokątowi można przyporządkować pewne równanie tej postaci. Daje to metodę rozwiązywania zadań dotyczących wielokątów foremnych.

Pięciokąty foremne: wypukły i wklęsły (gwiaździsty)



Wynik przykładu 1 pozwala na skonstruowanie przy pomocy cyrkla i linijki pięciokąta foremnego.
W tym celu wykreślamy okrąg o promieniu 1 i dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że jego środek znajduje się w punkcie 0. Połowimy (za pomocą cyrkla i linijki) odcinek $[-1;0]$ i z punktu $-\frac{1}{2}$ zataczamy okrąg przechodzący przez punkt i. Z twierdzenia Pitagorasa odcinek $\left[-\frac{1}{2}; i\right]$ ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{2^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, a więc wykreślony okrąg o środku $-\frac{1}{2}$ przecina prawą półoś odciętych w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.
W konsekwencji odcinek $[i; x_0]$ ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, która — jak łatwo sprawdzić — jest równa długości boku wypukłego pięciokąta foremnego z przykładu 1.

Przykład 1. Wyrazimy za pomocą czterech działań i pierwiastkowania liczb wymiernych kosinus kąta, pod jakim widać bok wypukłego pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg ze środka tego okręgu.

Szukany kosinus $\left(\text{oczywiście kąta } \frac{2}{5}\pi \text{ czyli } 72^\circ\right)$ wynosi: $\cos 72^\circ = \operatorname{re} z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, gdzie $z = (\sqrt[5]{1})_1$. Ale $0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = z^2(z-1)\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right)$, skąd wobec tożsamości $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$ otrzymujemy

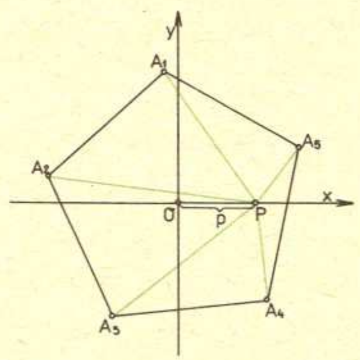
$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \text{ czyli } 4\cos^2 72^\circ + 2\cos 72^\circ - 1 = 0.$$

Ponieważ $\cos 72^\circ > 0$, więc pozostaje tylko jedna możliwość: $\cos 72^\circ = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

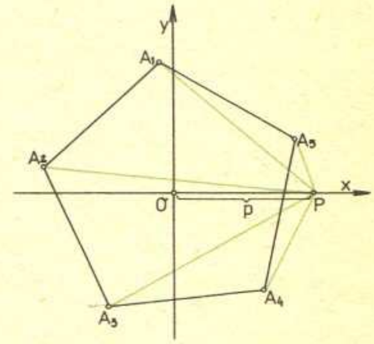
Przykład 2. Wykażemy, że jeśli $A_1A_2 \ldots A_n$ jest wielokątem foremnym wpisanym w okrąg o promieniu r, zaś P dowolnym punktem tej samej płaszczyzny odległym od środka O okręgu o p, przy czym $\sphericalangle POA_k = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, n$, to

$$PA_1^2 \cdot PA_2^2 \cdot \ldots \cdot PA_n^2 = p^{2n} - 2p^n r^n \cos n\varphi_k + r^{2n}.$$

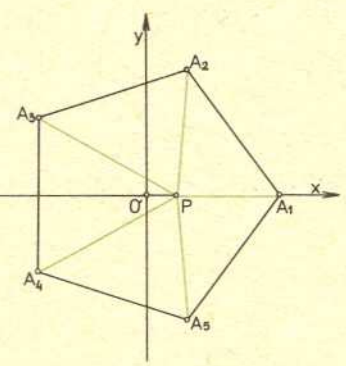
Jest to tzw. twierdzenie de Moivre'a (czyt. de Muawra) o kole. W przypadkach, gdy P leży na promieniu OA_1, tzn. $\varphi_1 = 0$, lub P leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle A_nOA_1$, tzn. $\varphi_1 = \pi/n$, mówi się o twierdzeniu Cotesa (czyt. Koutsa) o kole.
Obierzmy tak układ współrzędnych, by jego początek pokrywał się z punktem O, punkt P zaś leżał na półosi rzeczywistej dodatniej (tj. $z = \operatorname{re} z > 0$). Liczby zespolone odpowiadające punktom $A_1, \ldots, A_n$ są pierwiastkami równania $z^n = r^n(\cos n\varphi_k + i \sin n\varphi_k)$: zatem
$PA_1^2 \cdot PA_2^2 \cdot \ldots \cdot PA_n^2 = |r^n(\cos n\varphi_k + i\sin n\varphi_k) - p^n|^2 = p^{2n} - 2p^n r^n \cos n\varphi_k + r^{2n}$, c.b.d.u.



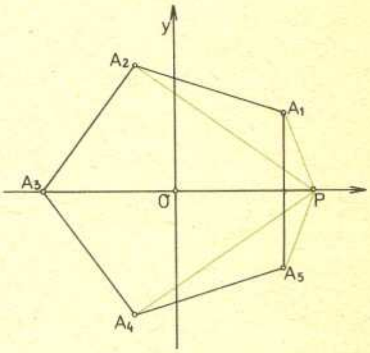
Punkt P z przykładu 2 leży wewnątrz wielokąta $A_1A_2 \ldots A_n$



Punkt P z przykładu 2 leży na zewnątrz wielokąta $A_1A_2 \ldots A_n$



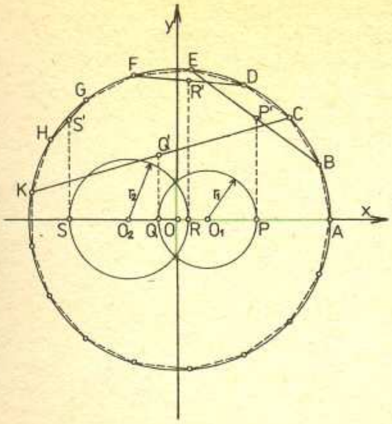
Punkt P z przykładu 2 leży na promieniu OA_1



Punkt P z przykładu 2 leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle A_5OA_1$

Zauważmy, że rozumowanie nie zależy od wyboru wielokąta foremnego wyznaczonego przez n pierwiastków równania $z^n = r^n$: może on być zarówno wypukły jak i wklęsły (gwiaździsty).

Przykład 3. Niech $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ oznaczają dziewięć kolejnych wierzchołków wypukłego 17-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku O. Niech dalej P, Q, R, S będą rzutami środków cięciw BE, CK, DF, GH na prostą OA. Udowodnimy, że jeżeli na PQ i RS jako na średnicach zakreślimy okręgi, to wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez punkt O, a jej długość jest równa $\frac{1}{2}OA$.



Długość wspólnej cięciwy okręgów o średnicach PQ i RS jest równa $\frac{1}{2}\,OA$

Obierzmy tak układ współrzędnych, by jego początek pokrywał się z punktem O, punkt A zaś leżał na półosi rzeczywistej dodatniej. Jeśli wprowadzimy oznaczenie $r = OA$, to możemy uważać punkty $A, \ldots, K$ za punkty płaszczyzny odpowiadające pierwiastkom równania podziału koła $z^{17} = r^{17}$. Pierwiastki te są dane wzorem

$$z_k = r\left(\cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}\right), \quad k = 0, \ldots, 16.$$

Współrzędne środków cięciw BE, CK, DF, GH wynoszą:

$$\frac{1}{2}(z_1+z_4) \quad \text{dla} \quad BE, \qquad \frac{1}{2}(z_2+z_8) \quad \text{dla} \quad CK,$$

$$\frac{1}{2}(z_3+z_5) \quad \text{dla} \quad DF, \qquad \frac{1}{2}(z_6+z_7) \quad \text{dla} \quad GH.$$

Możemy teraz wyznaczyć punkty P, Q, R, S:

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{re}\,(z_1+z_4) = \frac{1}{2}\,r(u_1+u_4),$$

gdzie $\quad u_k = \cos\frac{2k\pi}{17}, \quad k = 0, \ldots, 16, \quad$ i podobnie

$$Q = \frac{1}{2}\,r(u_2+u_8), \qquad R = \frac{1}{2}\,r(u_3+u_5), \qquad S = \frac{1}{2}\,r(u_6+u_7).$$

Jeśli na odcinkach PQ i RS jako na średnicach zakreślimy okręgi, to ich środki będą odpowiednio w punktach

$$O_1 = \frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}\,r(u_1+u_4+u_2+u_8), \qquad O_2 = \frac{1}{2}(R+S) = \frac{1}{2}\,r(u_3+u_5+u_6+u_7),$$

a promienie wyniosą $r_1 = \frac{1}{2}\,r|u_1+u_4-u_2-u_8|, \quad r_2 = \frac{1}{2}\,r|u_3+u_5-u_6-u_7|$.

W przyjętym układzie współrzędnych równania tych okręgów mają postać

$$(x-O_1)^2+y^2 = r_1^2, \qquad (x-O_2)^2+y^2 = r_2^2.$$

Rozważane okręgi przecinają się w punktach

$$\left(-\frac{r_1^2+O_2^2-r_2^2-O_1^2}{2(O_2-O_1)},\ r_1^2-O_1^2\right), \left(\frac{r_1^2+O_2-r_2^2-O_1^2}{2(O_2-O_1)},\ r^2-O_2^2\right),$$

przy czym oczywiście $r_2^2-O_2 = r_1^2-O_1^2$.

Wykażemy najpierw, że odcinek łączący te punkty przechodzi przez punkt O. Obliczamy:

$$r_1^2+O_2^2-r_2^2-O_1^2 = \frac{1}{4}\,r^2[(u_3+u_5)(u_6+u_7)-(u_1+u_4)(u_2+u_8)].$$

Bezpośrednie sprawdzenie daje $(u_3+u_5)(u_6+u_7) = (u_1+u_4)(u_2+u_8)$ z uwagi na definicję liczb u_k, a więc istotnie rozpatrywany odcinek przechodzi przez punkt O.

Wykażemy z kolei, że długość tego odcinka wynosi $\frac{1}{2}\;OA$, tj. że

$$r_1^2-O_1^2 = \left(\frac{1}{4}\,r\right)^2, \quad \text{czyli } r_2^2-O_2^2 = \left(\frac{1}{4}\,r\right)^2.$$

W tym celu sprawdzamy bezpośrednio, że

$$-\frac{1}{4}\,r^2(u_1+u_4)(u_2+u_8) = r_1^2+O_1^2 = r_2^2-O_2^2 = -\frac{1}{4}\,r^2(u_3+u_5)(u_6+u_7).$$

Zastosowanie definicji liczb u_k, wzoru na sumę kosinusów i wzorów redukcyjnych dla funkcji kosinus prowadzi do tożsamości

$$-\frac{1}{4}(u_1+u_4)(u_2+u_8) = \cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$-\frac{1}{4}(u_3+u_5)(u_6+u_7) = \cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}.$$

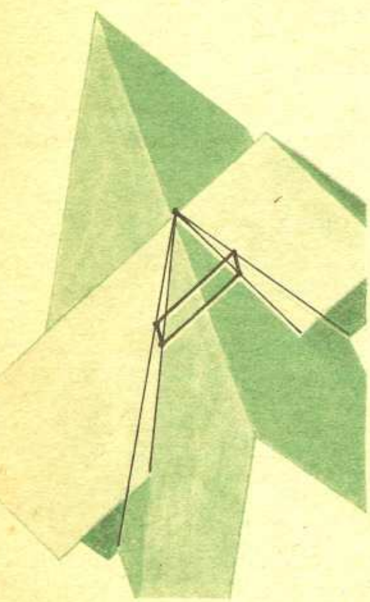
Tak więc kwadrat długości szukanego odcinka wynosi

$$r\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17}\cdot r\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}.$$

Pozostaje dowieść, że

$$(*)\ \cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \left(\frac{1}{2}\right)^8.$$

Rozwiązanie zadania M 153. Niech A, B, C, D będą punktami należącymi do różnych krawędzi kąta, którego wierzchołek oznaczymy przez S, przy czym czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Ponieważ prosta AB jest równoległa do prostej CD, więc krawędź k, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny SAB i SCD, jest równoległa do obu tych prostych (dlaczego?). Podobnie krawędź l, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny SAD i SBC, jest równoległa do każdej z prostych AD i BC. Szukana płaszczyzna jest więc równoległa do płaszczyzny π, zawierającej proste k i l. Oczywiście każda płaszczyzna równoległa do π, i przecinająca krawędzie kąta daje w przekroju równoległobok.



Dla dowodu tożsamości (*) zauważmy, że

$$z^{17}+1 = (z+1)\left(z^2+2z\cos\frac{2\pi}{17}+1\right)\left(z^2+2z\cos\frac{4\pi}{17}+1\right)\cdot \ldots$$
$$\ldots\cdot\left(z^2+2z\cos\frac{14\pi}{17}+1\right)\left(z^2+2z\cos\frac{16\pi}{17}+1\right),$$

skąd

$$1^{17}+1 = 2\cdot 2\left(1+\cos\frac{2\pi}{17}\right)\cdot 2\left(1+\cos\frac{4\pi}{17}\right)\cdot \ldots \cdot 2\left(1+\cos\frac{16\pi}{17}\right),$$

czyli

$$\left(1+\cos\frac{2\pi}{17}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{17}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\cos\frac{16\pi}{17}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^8.$$

Stosując teraz tożsamość $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ otrzymujemy $2^8\cos^2\frac{\pi}{17}\cos^2\frac{2\pi}{17}\cdot\ldots$ $\ldots\cdot\cos^2\frac{8\pi}{17} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$, skąd wynika równość (*).

Jest ciekawe, że siedemnastokąt foremny daje się konstruować za pomocą cyrkla i linijki. Najłatwiej wyprowadzić to ze stosunkowo łatwego do sprawdzenia faktu, że pierwiastki równania $z^2+\frac{1}{2}z = 1$ mogą być zapisane w postaci

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{17}+\cos 3^2\frac{2\pi}{17}+\cos 3^4\frac{2\pi}{17}+\cos 3^6\frac{2\pi}{17},$$

$$z_2 = \cos 3\frac{2\pi}{17}+\cos 3^3\frac{2\pi}{17}+\cos 3^5\frac{2\pi}{17}+\cos 3^7\frac{2\pi}{17},$$

co pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład 3 został zaczerpnięty z książki E. W. Hobsona *Trygonometrja płaska* (tłum. z ang.), Warszawa 1917, gdzie jest podany jako zadanie. Proponujemy rozwiązanie kilku innych zadań z tej ciekawej książki, które podajemy poniżej. Proponujemy też lekturę książeczek: A. W. Mostowskiego *Rozwiązywanie równań algebraicznych*, Warszawa 1967, oraz A. G. Szkolnika *Zadacza dielenia kruga*, Moskwa 1948, wydanie drugie.

Zadanie 1. W okrąg o promieniu r wpisujemy wypukły n-kąt foremny i z dowolnego punktu okręgu prowadzimy cięciwy do wierzchołków. Długości tych cięciw oznaczamy przez $c_1, \ldots, c_n$, przy czym zaczynamy od cięciwy poprowadzonej do najbliższego wierzchołka (ewentualnie do jednego z dwu najbliższych wierzchołków), dalsze zaś bierzemy w tym samym porządku co wierzchołki. Dowieść, że suma $c_1c_2+c_2c_3+c_3c_4+\ldots+c_{n-1}c_n-c_nc_1$ jest niezależna od położenia punktu, z którego poprowadziliśmy cięciwy i wynosi $2r^2n\cos\frac{\pi}{n}$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeżeli $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ jest wypukłym wielokątem foremnym wpisanym w okrąg, zaś P oznacza dowolny punkt okręgu położony między A_{2n+1} i A_1, to $PA_1+PA_3+\ldots$ $\ldots+PA_{2n+1} = PA_2+PA_4+\ldots+PA_{2n}$.

Zadanie 3. Niech $A_1A_2\ldots A_{2n}$ będzie wielokątem foremnym. Udowodnić, że iloczyn długości odcinków prostopadłych poprowadzonych ze środka okręgu opisanego do prostych A_1A_2, A_1A_3, $\ldots$, A_1A_n jest równy $\left(\frac{1}{2}r\right)^{n-1}\sqrt{n}$, gdzie r jest promieniem okręgu opisanego.

Zadanie 4. Dowieść, że liczba m różnych (w sensie przystawania) wielokątów foremnych o n bokach, które można wpisać w dany okrąg o promieniu r, jest równa połowie ilości liczb naturalnych mniejszych od n i pierwszych względem n. Wykazać ponadto, że iloczyn długości boków jest równy $\sqrt{\frac{n}{n-2m}}\,r^m$ albo r^m w zależności od tego, czy n jest czy też nie jest potęgą liczby pierwszej.

Zadanie 5. Niech $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ będą odległościami wierzchołków wielokąta foremnego od punktu P tej samej płaszczyzny, r — promieniem okręgu opisanego na wielokącie, $p = OP$, gdzie O jest środkiem okręgu, ϑ zaś jest kątem pomiędzy OP a promieniem poprowadzonym do któregokolwiek wierzchołka wielokąta. Udowodnić, że wówczas

$$\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\ldots+\frac{1}{\varrho_n^2} = \frac{n(p^{2n}r^{2n})}{(p^2-r^2)(p^{2n}-2p^nr^n\cos n\vartheta+r^{2n})}.$$

Zadanie 6. Dowieść, że jeżeli dwa wypukłe wielokąty foremne $A_1A_2\ldots A_{2n}$ i $B_1B_2\ldots B_{2n}$ są współśrodkowe i jednokładne i jeżeli P jest dowolnym punktem okręgu współśrodkowego z opisanymi wielokątami i zakreślonego promieniem równym średniej geometrycznej promieni okręgów opisanych na wielokątach, to wówczas:

$$\frac{PA_1\cdot PA_3\cdot\ldots\cdot PA_{2n-1}}{PA_2\cdot PA_4\cdot\ldots\cdot PA_{2n}} = \frac{PB_1\cdot PB_3\cdot\ldots\cdot PB_{2n-1}}{PB_2\cdot PB_4\cdot\ldots\cdot PB_{2n}}.$$