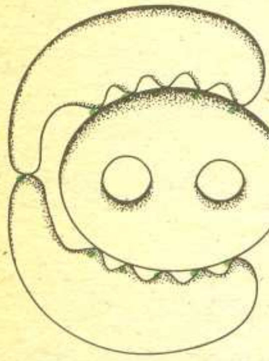
Punkty stałe, geodezja i charakterystyka Eulera

Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

Przykłady zaprezentowane w innych artykułach tego numeru Delty sugerują, że o punktach stałych przekształceń trudno jest powiedzieć coś więcej, niż da się wyciągnąć z twierdzeń Brouwera i Banacha. Zauważmy jednak, że rozpatrywane tam obiekty są dość skomplikowane, lokalnie wręcz ,,dzikie''. Jeżeli ograniczymy się w naszych rozważaniach do węższej klasy ,,porządnych'' przestrzeni (konkretnie: wielościanów topologicznych), będziemy mogli już wypowiedzieć szereg ciekawych, nietrywialnych twierdzeń opisujących istnienie punktów stałych odwzorowań ciągłych.

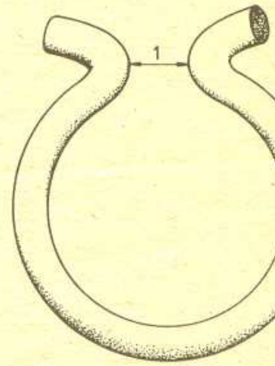
Nie będziemy tu podawać ścisłej definicji powierzchni, ograniczymy się tylko do przykładów: sfera, torus, precel z n dziurami, butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa, hiperboloida... Nie są powierzchniami: koło z brzegiem, kula, sfera z doczepionym odcinkiem itp. Zakładamy także, że nasze powierzchnie są gładkie, bez ,,kantów'', ostrzy, dziobków itp. Wykluczamy na przykład powierzchnię stożkową, dwie sfery styczne i powierzchnię stromego dachu (albo kawałek grani tatrzańskiej koło Żabiego Konia).

Wielościanem topologicznym nazywamy zbiór homeomorficzny z sumą wielościanów wypukłych (przez wielościan rozumiemy także wielokąt, odcinek i punkt).

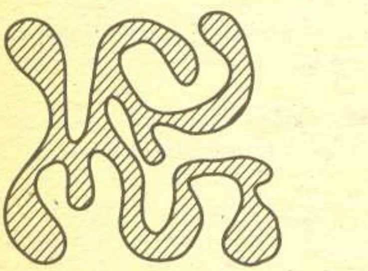


Takich powierzchni nie rozpatrujemy.

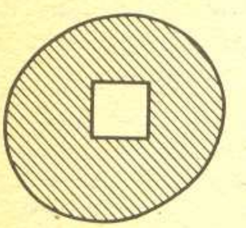
Twierdzenia te wymagają jednak dość rozbudowanego aparatu algebraicznego, ograniczymy się więc do przypadku powierzchni i odwzorowań ,,mało ruszających punkty''. Aby sprecyzować, co znaczy, że przekształcenie ,,mało rusza punkty'', zauważmy najpierw, że dla każdej powierzchni istnieje taka stała $A > 0$, że dwa punkty odległe mniej niż o A można połączyć dokładnie jednym najkrótszym łukiem, leżącym całkowicie na tej powierzchni. Kierunek takiej krzywej zależy w sposób ciągły od położeń punktów. Możemy teraz powiedzieć, że przekształcenie f mało rusza punkty, jeżeli odległość x od $f(x)$ jest stale mniejsza od wyżej wspomnianej stałej A.



Dla sfery o promieniu r stała A wynosi $2r$, dla torusa o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r mamy $A = \min(2r, 2R)$, dla powierzchni na rysunku powyżej $A = 1$.



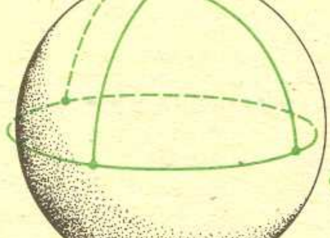
Obszar jednospójny.



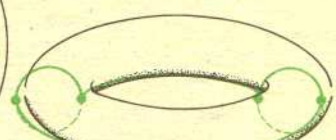
Obszar niejednospójny.

Na powierzchniach możemy rysować mapy. Mapę nazwiemy ,,dobrą'', jeżeli każde państwo tworzy obszar jednospójny (rysunek) i w żadnym punkcie nie schodzą się cztery granice (ani więcej). Mapa Afryki nie jest ,,dobra'' (Botswana, Zambia, Namibia i Zimbabwe dotykają się w jednym punkcie), ale i w Europie istnienie Republiki San Marino zmienia własności topologiczne mapy. Punkty zbiegu trzech granic nazwiemy wierzchołkami mapy, a termin ,,granica'' będzie oznaczał wspólny odcinek linii granicznej między kolejnymi wierzchołkami.

Przypomnijmy teraz, że charakterystyką Eulera powierzchni $\mathcal{M}$ nazywamy liczbę $\chi(\mathcal{M}) = w-k+n$, gdzie w jest liczbą wierzchołków, k — liczbą granic, a n — liczbą państw na ,,dobrej'' mapie naszej powierzchni.

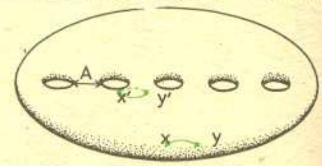


Sfera: 4 wierzchołki, 4 obszary, 6 granic. Charakterystyka Eulera = 2.



Torus: 4 wierzchołki, 4 obszary, 8 granic. Charakterystyka = 0.

Punkty x, y są bliskie, x' i y' — dalekie.



Precel z 5 dziurami (charakterystyka Eulera precla z n dziurami $= 2-2n$).

Możemy teraz sformułować nasze

Twierdzenie. *Jeżeli charakterystyka Eulera powierzchni $\mathcal{M}$ jest różna od zera, to każde odwzorowanie ciągłe $f{:}\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ma punkt stały.*

Wynika stąd łatwo (jak?)

Wniosek. *Jeżeli przekształcenie ciągłe dwuwymiarowej sfery w siebie nie ma punktu stałego, to znajdzie się na niej taki punkt, który przechodzi na punkt do niego antypodyczny.*

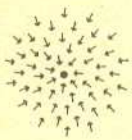
Nasze twierdzenie wynika zaś z następującego **twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza:**

Jeżeli V jest takim polem wektorów stycznych do $\mathcal{M}$, że jedynymi jego miejscami zerowymi są ,,źródła'', ,,ujścia'' i ,,siodła'', to liczba ,,źródeł'' + liczba ,,ujść'' — liczba ,,siodeł'' $= \chi(\mathcal{M})$.

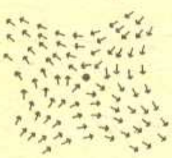
Istotnie, jeżeli przekształcenie f mało rusza punkty $\mathcal{M}$, to przyporządkowując każdemu punktowi $x \in \mathcal{M}$ wektor o kierunku najkrótszej krzywej łączącej x z $f(x)$ i o długości równej odległości x od $f(x)$ otrzymamy pole V wektorów stycznych do $\mathcal{M}$. Jeżeli teraz f nie ma punktów stałych, to pole V nie ma miejsc zerowych i wtedy $\chi(\mathcal{M}) = 0$.

Pole wektorów stycznych otrzymujemy przyporządkowując (w sposób ciągły) punktom $x \in \mathcal{M}$ wektory styczne do $\mathcal{M}$ w x. Miejscem zerowym takiego pola nazywamy punkt, w którym przyporządkowany wektor styczny jest zerowy.
Na powierzchni zwartej takie pole może mieć tylko skończenie wiele miejsc zerowych.

Źródło.

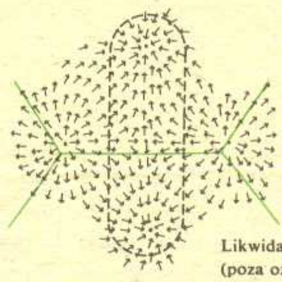


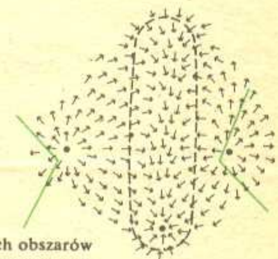
Ujście.



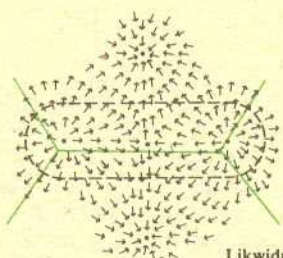
Siodło.

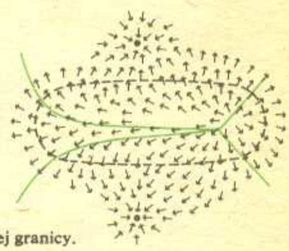
Dowód twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza składa się z dwóch części. W pierwszej, dość skomplikowanej, ale wyraźnie pomocniczej pokazuje się, że liczba po lewej stronie równości jest taka sama dla wszystkich pól. Tę część dowodu pominiemy. W części drugiej buduje się już konkretne pole spełniające napisaną w tezie twierdzenia równość. A robi się to tak: Rysujemy na $\mathcal{M}$ dobrą mapę, a potem budujemy pole mające w każdym wierzchołku źródło, na każdej krawędzi siodło i w każdym obszarze ujście. I już.
Można wyobrazić sobie górski krajobraz, w którym wierzchołki są szczytami gór, granice — graniami i obszary — nieckowatymi dolinami. Pole nasze jest wtedy polem kierunków największego nachylenia stoków, inaczej: polem kierunków ścieku wody. Możemy także narysować ,,komiks", ilustrujący dowód następującego uzupełnienia twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza:
Na powierzchni o charakterystyce χ istnieje pole mające a) w przypadku $\chi \geqslant 0$ dokładnie χ źródeł i ujść, a bez siodeł, b) $-\chi$ siodeł, za to bez źródeł i ujść, gdy $\chi < 0$. W tym ,,komiksie" redukujemy liczbę krawędzi, obszarów i wierzchołków mapy, przebudowując odpowiednio pole:





Likwidacja granicy i scalenie dwóch obszarów (poza oznaczonym pasem nic nie zmieniamy).





Likwidacja jednego wierzchołka i jednej granicy. Znów nie zmieniamy nic poza oznaczonym pasem.

Dojdziemy w ten sposób do minimalnej konfiguracji, spełniającej warunki naszego twierdzenia. Twierdzenie Poincarégo-Hopfa-Lefschetza i idea jego dowodu są bardzo charakterystyczne dla szeregu twierdzeń tzw. analizy globalnej, w której poszukuje się zależności między informacjami o lokalnej postaci pewnego obiektu (tu: lokalną postacią pola V), a opisem globalnym (tu: charakterystyką $\chi(\mathcal{M})$). Aby pokazać, jak szeroki jest wachlarz tego typu twierdzeń, podamy dwa w pewnym sensie dualne ,,geodezyjne" opisy $\chi(\mathcal{M})$. Przypuśćmy, że na powierzchni $\mathcal{M}$ mamy mapę, której obszary są trójkątami krzywoliniowymi o średnicach mniejszych niż określona na początku stała A — a ich granice — odcinkami najkrótszych krzywych łączących wierzchołki. Oznaczmy przez α_k, β_k, γ_k kąty pomiędzy kierunkami krzywych łączących tworzących granicę k-tego obszaru w jego wierzchołkach. Wtedy

Mowa tu o trójkątach topologicznych (por. uwaga na marginesie w początku artykułu).

Średnica obszaru — to kres górny odległości jego punktów.

$$\sum(\alpha_k+\beta_k+\gamma_k-\pi) = 2\pi\cdot\chi(\mathcal{M}).$$

Jeżeli teraz zastąpimy granice przez odcinki łączące wierzchołki, a obszary przez trójkąty płaskie, to w wierzchołku w_l otrzymamy kąt bryłowy o kątach płaskich $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Oznaczmy:

$$\Delta_l = \alpha_1+\alpha_2+ \ldots \alpha_n-2\pi.$$

Wtedy $\sum \Delta_l = -2\pi\cdot\chi(\mathcal{M})$. I znów ,,lokalne" opisy kształtu powierzchni $\mathcal{M}$ doprowadziły nas do zależności, w której występuje pewien ,,globalny" niezmiennik powierzchni.

Kącik czytelniczy

OSTRZEŻENIE DLA NAS WSZYSTKICH

Spojrzeli na siebie. George nie miał żadnych emocjonalnych sekretów przed żoną, ale było coś, czego jej nigdy nie powiedział. Studiował matematykę i zamierzał zostać matematykiem. Jednakże w obliczu czystej nauki, owych zimnych Himalajów intelektu, zawiodła go odwaga, po czym szybko zwrócił się ku światu, w którym żyć można ciepło, dostatnio i łatwo. Będąc mądrym mężczyzną oraz zdolnym urzędnikiem państwowym wykonywał proste dla niego funkcje, przez co nieraz czuł, że jego umysł leży odłogiem i że los pozbawił go wielkości. Żonie o tych sprawach nie mówił ani o tym że nigdy nie przestanie gardzić sobą za to fiasko.

Iris Murdoch, ,,*Przypadkowy człowiek*"
tłumaczenie Zdzisława Bohdanowicza