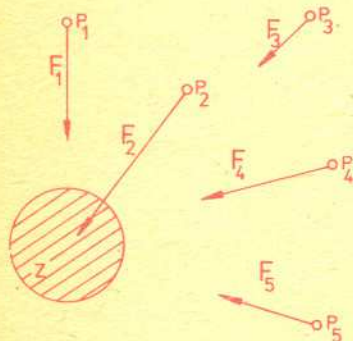
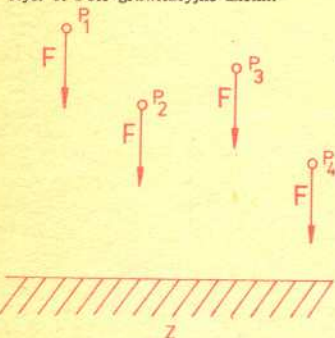


Rachunek różniczkowy na co dzień

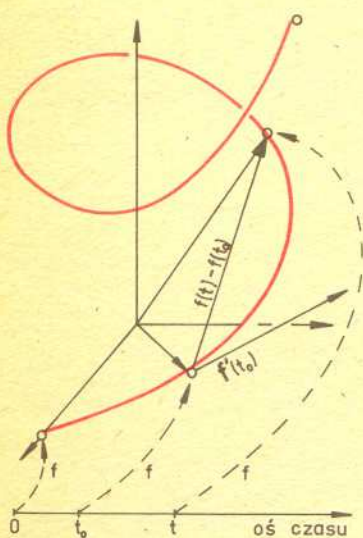
Jaki związek ma rachunek różniczkowy z piłką nożną? Czy powinni się go uczyć trenerzy miotaczy i instruktorzy prowadzący kursy spadochronowe? Czy rachunek różniczkowy może się przydać w czasie weekendu nad jeziorem? Oto temat, który Ci proponuję, Czytelniku, gdy odrywając się od prac codziennych sięgniesz po Deltę, by zażyć intelektualnej rozrywki. Naszą zabawę w dużej mierze zawdzięczamy Izaakowi Newtonowi. On bowiem nauczył potomnych, że każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłą, której wielkość jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ich środków.



Rys. 1. Pole grawitacyjne Ziemi.



Rys. 2. Stałe pole sił.



Rys. 3. Tor i pochodna ruchu.

Punkty przestrzeni R^3 można utożsamiać z ich wektorami wodzącymi względem początku układu (rys. 3), a dzięki temu można na nich wykonywać takie działania, jakie wykonujemy na wektorach. To umożliwia określenie pochodnej wzorem (1). Dzięki pominięciu siły Coriolisa ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie.

Funkcję tę wyrażają odpowiednio poziomą i pionową składową prędkości ruchu.

Nietrudno stąd wynioskować, że ustalone ciało, jakim jest kula ziemską Z , jednoznacznie przyporządkowuje każdemu punktowi P otaczającej je przestrzeni wektor F , wyrażający siłę, jaką Z przyciąga masę jednostkową umieszczoną w tym punkcie. To przyporządkowanie jest funkcją, zwaną polem grawitacyjnym Ziemi. Ponieważ człowiek znajdujący się na jej powierzchni (np. na boisku lub łące) obserwuje tylko mały kawałek przestrzeni otaczającej kulę ziemską, więc wektory pola grawitacyjnego w punktach tego kawałka prawie nie różnią się ani kierunkiem, ani zwrotem, ani długością. Mówimy wówczas o stałym polu sił. Aby opisać matematycznie ruch punktu materialnego wywołany stałym polem sił, zauważmy, że zjawisko ruchu polega na przyporządkowaniu każdej chwili t z pewnego przedziału czasowego $[0, a)$, jednoznacznie określonego położenia rozważanego punktu materialnego w przestrzeni. Matematycznie rzecz traktując, ruch punktu materialnego jest więc funkcją $f: [0, a) \rightarrow R^3$. Jej przeciwwiedzią (zbiorem wartości) jest pewna linia położona w przestrzeni R^3 , zwana torem tego ruchu. Pochodną w ustalonej chwili $t_0 \in [0, a)$ funkcji f jest wektor

$$(1) \quad f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

który jest wektorem stycznym do toru ruchu w jego punkcie $f(t_0)$ (por. rys. 3). Fizycznie wektor ten wyraża chwilową prędkość ruchu w chwili t_0 , o czym łatwo się przekonać porównując równość (1) z określeniem prędkości chwilowej. Wykorzystując znane określenie przyspieszenia Czytelnik może się w podobny sposób przekonać, że druga pochodna $f''(t_0)$ funkcji f w chwili t_0 jest wektorem wyrażającym przyspieszenie naszego ruchu w chwili t_0 .

W czasie ruchu punktu materialnego w stałym polu grawitacyjnym na punkt ten działają następujące siły: stała (w czasie) siła grawitacji F , zmienna siła oporu $H(t)$ oraz siła Coriolisa i siła odśrodkowa, których źródłem jest ruch obrotowy kuli ziemskiej. Ponieważ te ostatnie siły wywierają niewielki wpływ, zwłaszcza na ruch krótkotrwały, a istotnie komplikują matematyczny opis ruchu, więc pominiemy je w naszych rozważaniach (por. rys. 4) podobnie, jak pomijamy np. przyciąganie naszego punktu przez inne ciała niebieskie.

Na podstawie drugiej zasady dynamiki (pochodzącej znów od Izaaka Newtona, podobnie jak pochodna i jej związek z prędkością i przyspieszeniem), iloczyn masy m naszego punktu materialnego i jego przyspieszenia jest w każdej chwili równy wypadkowej wszystkich sił działających na ten punkt. Przy naszych oznaczeniach zasadę tę wyraża następująca równość

$$(2) \quad mf''(t) = H(t) + F \quad \text{dla } t \in [0, a).$$

Wykorzystując kolejne prawo fizyczne orzekające, że na ciało będące w ruchu działa ze strony ośrodka siła oporu proporcjonalna do wektora prędkości, lecz przeciwnie skierowana, otrzymujemy równość

$$(3) \quad H(t) = -mf'(t) \quad \text{dla } t \in [0, a),$$

gdzie $c \geq 0$ oznacza współczynnik oporu zależny od poruszającego się ciała i rodzaju ośrodka. Wyrażając jeszcze siłę grawitacji F w postaci $F = mg$, gdzie g jest wektorem przyspieszenia grawitacyjnego i uwzględniając (2) oraz (3) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$(4) \quad f''(t) = -cf'(t) + g \quad \text{dla } t \in [0, a),$$

w którym f jest funkcją niewiadomą.

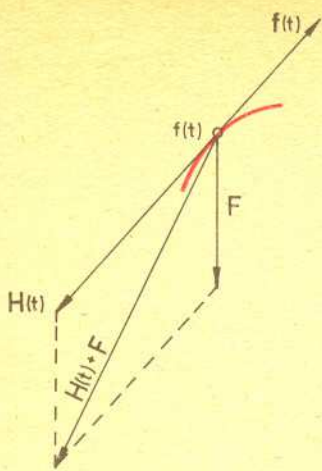
Warto zauważyć, że równanie to opisuje nie jakiś jeden konkretny przypadek ruchu, lecz wszystkie możliwe warianty ruchu w stałym polu grawitacyjnym tak, jak prawa fizyczne, z których zostało ono wyprowadzone. Dlatego też należy się spodziewać bardzo dużej ilości rozwiązań równania (4).

Aby rozwiązać równanie różniczkowe (4) wprowadźmy w płaszczyźnie ruchu układ współrzędnych przyjmując, że jego pierwsza oś s leży w płaszczyźnie terenu (np. płyty boiska), druga zaś jego oś h jest pionowa, skierowana w górę i przechodzi przez punkt początkowy ruchu $f(0)$. Oznaczając przez $(x(t), y(t))$ współrzędne punktu $f(t)$ w tym układzie, możemy równanie (4) zastąpić układem równań różniczkowych

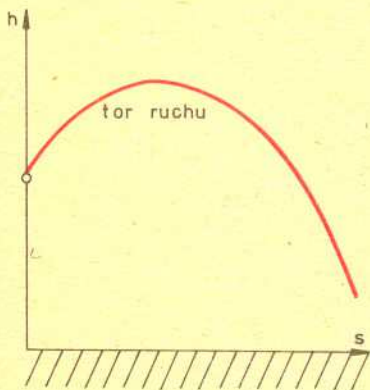
$$(5) \quad \begin{cases} x''(t) = -cx'(t), \\ y''(t) = -cy'(t) - g, \end{cases}$$

gdzie g oznacza skalarną wielkość przyspieszenia grawitacyjnego. Wprowadzając nowe funkcje niewiadome

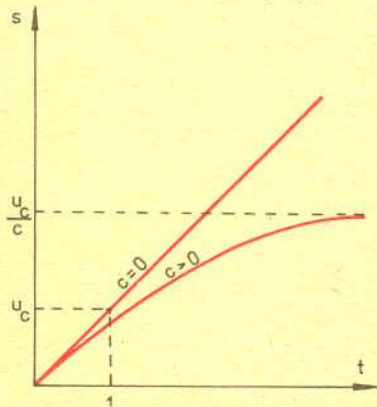
$$(6) \quad u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t),$$



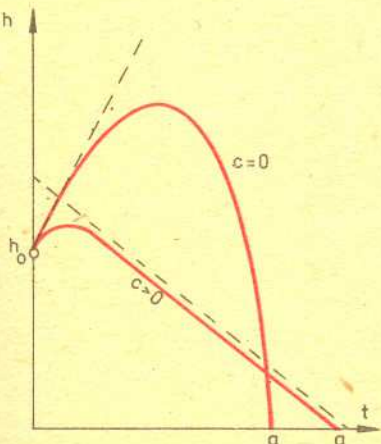
Rys. 4. Wypadkowa sił.



Rys. 5. Wybór układu współrzędnych.



Rys. 6. Wykres funkcji x (składowa pozioma ruchu).



Rys. 7. Wykres funkcji y (składowa pionowa ruchu).

zamiast układu (5) otrzymamy układ

$$(7) \quad \begin{cases} u'(t) = -cu(t), \\ v'(t) = -cv(t) - g. \end{cases}$$

Można od razu zauważyć, że jednym spośród rozwiązań pierwszego równania jest $u(t) \equiv 0$. Z teorii równań różniczkowych wynika zaś, że żadne z pozostałych jego rozwiązań nie może przyjmować wartości 0. Dzięki temu możemy pierwsze spośród równań (7) napisać w postaci

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -c$$

i rozwiązać je porównując funkcje pierwotne obu stron.

Otrzymujemy $\ln u(t) = -ct + A$, gdzie A jest stałą.

Stąd wyliczamy $u(t)$ otrzymując

$$(8) \quad u(t) = e^{A-c t} = u_0 e^{-c t}, \quad \text{gdzie } u_0 = u(0),$$

a stąd oraz z pierwszej spośród równości (6), przez kolejne całkowanie (porównanie funkcji pierwotnych obu stron) otrzymujemy ostateczne rozwiązanie pierwszego spośród równań (5):

$$(9) \quad x(t) = \begin{cases} u_0 t, & \text{gdy } c = 0 \text{ (brak oporu)} \\ \frac{u_0}{c} (1 - e^{-c t}), & \text{gdy } c > 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie to, jakkolwiek częściowe, opisuje jednak te ruchy, których torami są odcinki prostych poziomych, a siła grawitacji jest równoważona przez sprężystość podłoża (np. toczenie się piłki po podłożu, ruch łódki odepchniętej od brzegu jeziora i nie napędzanej). Analizując to rozwiązanie i wpływ stałych u_0 (prędkość początkowa) oraz c (współczynnik oporu) na przebieg ruchu można się świetnie bawić i uczyć. Na przykład, można wyjaśnić, dlaczego po odepchnięciu łódki od brzegu jeziora wyraźnie obserwujemy zanik jej ruchu, a nie możemy ustalić momentu jej zatrzymania się, mimo że możemy ustalić odległość, na jaką łódka odpłynęła od brzegu. Czy podobne zjawisko ma miejsce w przypadku ruchu piłki? A może potrafił Czytelniku zaprojektować i wykonać pomiar współczynnika oporu c dla piłki lub łódki?

Przechodząc do rozwiązania drugiego spośród równań (7) i pełniejszego opisu ruchów w stałym polu sił zauważmy, że różni się ono od pierwszego z tych równań tylko o stałą g . Można się więc spodziewać, że rozwiązania tych równań będą się niewiele różnić. Z teorii równań różniczkowych wynika, że różnica ta polega na zastąpieniu stałej u_0 , występującej po prawej stronie równości (8), przez stosownie dobraną funkcję φ zmiennej t . Aby ją znaleźć, podstawmy wyrażenie

$$(10) \quad v(t) = \varphi(t)e^{-c t}$$

do drugiego spośród równań (7). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \varphi'(t)e^{-c t} - c\varphi(t)e^{-c t} &= -c\varphi(t)e^{-c t} - g, \\ \varphi'(t) &= -ge^{c t}. \end{aligned}$$

a stąd

Całkując obustronnie wyliczamy

$$\varphi(t) = B - \frac{g}{c} e^{c t}, \quad \text{gdzie } B \text{ jest stałą,}$$

a uwzględniając (10) i przyjmując $v_0 = v(0)$ wyliczamy

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{c} \right) e^{-c t} - \frac{g}{c}.$$

Stąd i z drugiej spośród równości (6), przez kolejne całkowanie i przyjęcie $h_0 = y(0)$ otrzymujemy

$$(11) \quad y(t) = \begin{cases} h_0 + v_0 t - \frac{g t^2}{2}, & \text{gdy } c = 0, \\ h_0 - \frac{g}{c} t + \frac{v_0 c + g}{c^2} (1 - e^{-c t}), & \text{gdy } c > 0, \end{cases}$$

jako ostateczne rozwiązanie drugiego spośród równań (5).

W tym miejscu kończę swój udział, proponując Czytelnikowi samodzielne kontynuowanie. Polegać ono będzie na wszechstronnej analizie otrzymanych rozwiązań (9) i (11) układu (5), opisujących wszelkie ruchy swobodne w stałym polu grawitacyjnym. Wyjaśnić należy rolę każdego spośród następujących parametrów ruchu: wysokość początkowa h_0 , składowa pozioma u_0 i pionowa v_0 prędkości początkowej, współczynnik oporu c . Posługując się wzorami (9) i (11) oraz wykresami (rys. 6 i 7) można wyjaśnić na przykład, dlaczego użycie stosownego spadochronu zapewnia miękkie lądowanie przy spadaniu z dowolnej wysokości. Warto wyrugować ze wzorów (9) i (11) zmienną t i uzyskać w ten sposób równanie toru ruchu oraz narysować go i zauważyć, jak zależy on od wymienionych parametrów. Może uda się dokonać pomiaru współczynnika c dla piłki szybującej w powietrzu i nie tylko jakościowo, ale i ilościowo zanalizować jej ruch (choć na poziom meczów piłkarskich to nie wpłynie). Pytania można mnożyć, tematów jest więc mnóstwo.