

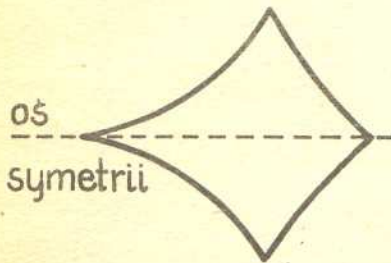
O Teorii Katastrof

Dr Jakub TATARKIEWICZ

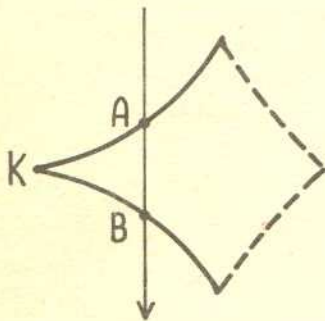


Zjawisko optyczne wywołane odbiciem światła od powierzchni wewnętrznej walca zostało opisane dawno — prawdopodobnie pierwszy uczynił to Wielebny Hamnet Holditch w roku 1857. Jednakże zadowolające wyjaśnienie efektu znajdujemy dopiero w pracach M. V. Berry'ego z połowy lat siedemdziesiątych naszego wieku. U podstaw rozważań Berry'ego leży Teoria Katastrof, sformułowana w roku 1965 przez wybitnego francuskiego matematyka René Thoma. Sama nazwa „Teoria Katastrof” jest nieco myląca. Teoria ta niewiele ma wspólnego z katastrofami w potocznym tego słowa rozumieniu. Chodzi raczej o zjawiska, w których stopniowym zmianom pewnych parametrów zwanych *parametrami kontrolnymi* towarzyszą nagle, ilościowe i jakościowe, zmiany zachowania się układu. Teoria Katastrof wywodzi się z topologii czyli działu matematyki zajmującego się niezmienniczymi ze względu na ciągłość własnościami zbiorów. W Teorii Katastrof zbiory te są nazywane *powierzchniami zachowania się*. Wszelkie załamania powierzchni zachowania się są dla układu „katastrofami”. Mówiąc inaczej — Teoria Katastrof zajmuje się kształtami powierzchni równowagi, przy czym „równowaga” może być rozumiana szeroko, przykładowo: stany równowagi układów fizycznych opisywane są przez powierzchnie stałej energii w przestrzeni fazowej. Thom pokazał, że dla procesów o co najwyżej czterech parametrach kontrolnych istnieje tylko siedem różnych katastrof elementarnych. Otrzymały one poetyczne nazwy, związane z charakterystycznymi kształtami powierzchni zachowania się: jaskółczy ogon, motyl, wigwam itp. Dowód twierdzenia Thoma jest skomplikowany, gdyż wymaga zastosowania analizy funkcjonalnej. Z drugiej strony, wnioski wynikające z Teorii Katastrof są stosunkowo łatwo zrozumiałe, a potencjalne zastosowania, szczególnie w biologii i socjologii — niezliczone. Tu postaramy się omówić jedno z zastosowań w odniesieniu do optyki.

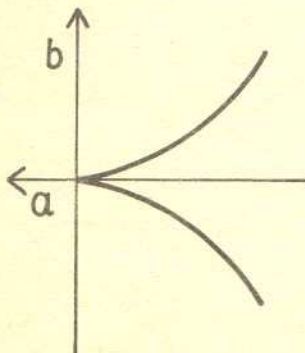
Fizyka, jakiej uczymy się w szkole, a nawet na studiach, fizyka Newtona, Maxwella, Schrödingera i Einsteina wykorzystuje jedną z podstawowych własności funkcji — ich różniczkowalność. Funkcje różniczkowalne są ciągłe. Postulowane równania różniczkowe opisują lepiej lub gorzej stany fizyczne układów. Tymczasem rzeczywistość, w której żyjemy, obfituje w zjawiska nieciągłe! Jako wygodny przykład opiszemy i przeanalizujemy urządzenie zwane od nazwiska uczonego, który je wymyślił, „maszyną” Zeemana.



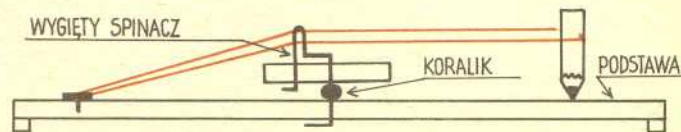
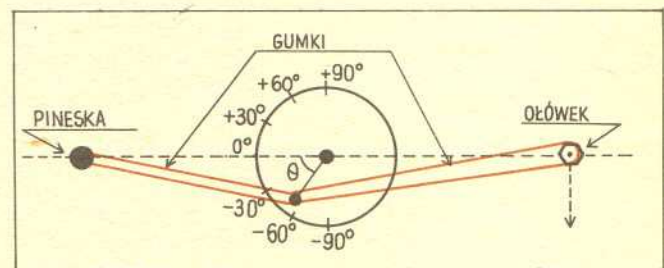
Rys. 2



Rys. 3

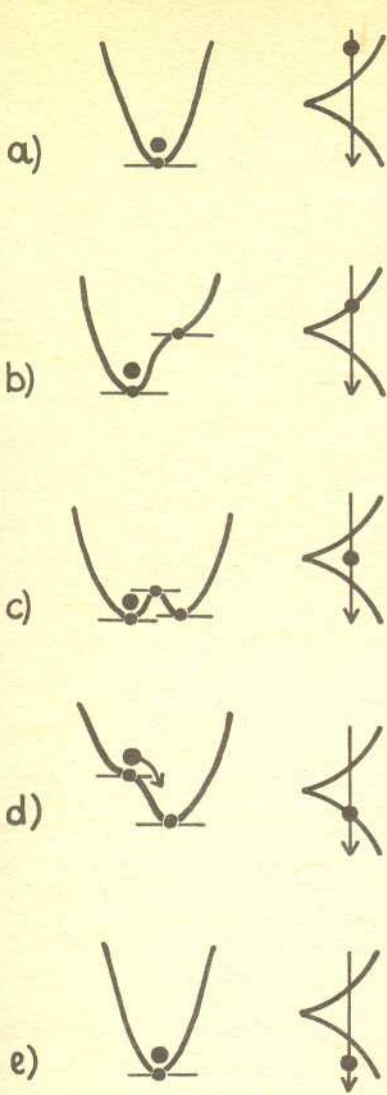


Rys. 4



Rys. 1

Składa się ona (rys. 1) z koła zamontowanego obrotowo na płaskiej podstawie i dwu gumek przyczepionych w jednym punkcie blisko brzegu koła. Długości gumek nierozciągniętych powinny być w przybliżeniu równe średnicy koła. Koniec jednej z gumek przymocowano na stałe do podstawy. Przez koniec drugiej przetknięto ołówek. Położenie ołówka na podstawie (para współrzędnych kartezjańskich) jest parametrem kontrolnym.



Rys. 5

Jeśli zbudujecie sobie własną „maszynę” Zeemana, to łatwiej Wam będzie śledzić dalszy ciąg artykułu. Niech parametrem zachowania się układu będzie wychylenie θ koła spowodowane ruszaniem ołówka po podstawie (rys. 1). Przy większości ruchów wychylenie będzie zmieniało się w sposób ciągły. Jednak przy odrobinie cierpliwości znajdziemy punkty, w których niewielkie przesunięcie ołówka wywołuje gwałtowny obrót koła. Zaznaczmy wszystkie takie punkty — otrzymamy krzywą jak na rysunku 2, przypominającą symbol koloru „karo” w kartach, leżącą w osi symetrii „maszyny”.

Rozważmy dokładniej zachowanie się „maszyny” wokół punktu K zbiegu ramion jednego z „rozków” (rys. 3). Ruszajmy ołówkiem tak, by jego tor przecinał oba ramiona „rożka”. W punkcie A nie obserwujemy osobliwości w sposobie poruszania się koła, gdy tymczasem w punkcie B wykonywa ono nagły obrót. W środku między punktami A i B zauważamy dwa położenia równowagi maszyny, z których obsadzane jest zawsze bliższe punktu przekroczenia ramienia „rożka”. Przesunięcie ołówka od B do A daje ze względu na symetrię „maszyny” efekt symetryczny. Korzystając z prawa Hooke’a można wypisać wyrażenie na energię potencjalną „maszyny”. Zgodnie z zasadą Hamiltona wszystkie układy fizyczne mają tendencję do zajmowania stanu o ekstremalnej energii (zwykle minimalnej). Będziemy więc szukali ekstremów energii potencjalnej „maszyny”. W analizie matematycznej wykazuje się, że na ogół funkcje jednej zmiennej można przybliżyć przez nieskończony szereg potęgowej tej zmiennej, nazywany rozwinięciem Taylora. Niestety, bez wnikania w Teorię Katastrof nie możemy uzasadnić, dlaczego ograniczenie rozwinięcia taylorowskiego energii potencjalnej do rzędu czwartego jest poprawne. Pozostaje uwierzyć na słowo.

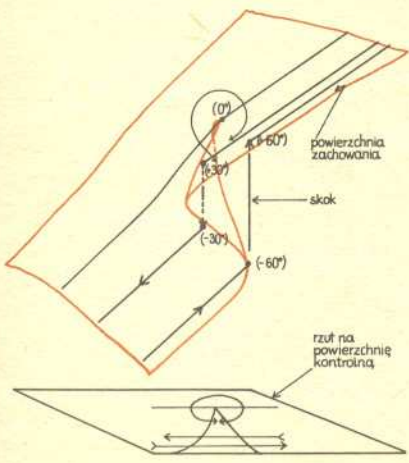
Należy jednak wiedzieć, że aparat matematyczny Teorii Katastrof określa dokładnie, od którego członu możemy rozwinięcie obciąć. Przyjmijmy dalej dla uproszczenia rachunków, że x jest pewną pomocniczą funkcją liniową kąta wychylenia θ koła, że układ współrzędnych kartezjańskich a i b położenia ołówka zaczepiamy w punkcie K (rys. 4) wreszcie, że jednostki długości dobraliśmy tak szczęśliwie, by współczynnik przy x^4 wynosił $\frac{1}{4}$. Otrzymujemy wtedy wyrażenie na energię potencjalną z dokładnością do wyrazów stopnia czwartego:

$$V = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx.$$

Szukajmy ekstremum potencjału ze względu na współrzędną x przyrównując pochodną do zera: $\frac{dV}{dx} = x^3 + ax + b = 0$. Wiadomo, że liczba pierwiastków rzeczywistych równania trzeciego stopnia zależy od znaku jego wyróżnika: $D = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}$. Nie będziemy analizowali wszystkich możliwości,

pozostawiając obliczenia jako zadanie dla Czytelników. Zwróćmy tylko uwagę, że „rozek” jest wykresem krzywej $4a^3 + 27b^2 = 0$. Kształty potencjału przy poruszaniu ołówkiem jak na rysunku 3 przedstawiają rysunki 5 a – f. Wymuszony ruch ołówka powoduje przechodzenie „maszyny” do coraz to nowych położeni o najniższej energii; nagły skok następuje od punktu przegięcia do minimum potencjału (rys. 5d). Przy ruchu od A do B odbywa się to w pobliżu punktu B .

Dwa różne stany równowagi w środku „rożka” są konsekwencją podwójnej jamki potencjału (rys. 5c), przy czym dla maszyny dostępny jest tylko jeden z dołków, wyznaczony przez kierunek ruchu ołówka.



Rys. 6

Na koniec zostawiliśmy wykonanie rysunku, który jest symbolem Teorii Katastrof. Załóżmy, że prostopadle do powierzchni wyznaczonej przez parametry kontrolne a i b (powierzchnia kontrolna) prowadzimy oś parametru zachowania się x (rys. 6). Powierzchnia złożona z wszystkich punktów, dla których pierwsza pochodna energii potencjalnej jest równa zero (powierzchnia o równaniu $x^3 + ax + b = 0$ w przestrzeni o współrzędnych (x, a, b)) jest pewnym odwzorowaniem przestrzeni kontrolnej w \mathbf{R}^3 . *Nota bene* w Teorii Katastrof zajmujemy się zwykle odwzorowaniem odwrotnym, gdyż interesujące są punkty krytyczne powierzchni kontrolnej. Dla „maszyny” Zeemana powierzchnia zachowania się utworzona jest z dwu słabo wygiętych płatów, odpowiadającym obszarom poza „rożkiem”. Natomiast w obszarze „rożka” powierzchnia jest zawinięta w kształt „zakładki”. Na rysunku 6 pokazano, że gdy zmieniamy położenie ołówka, czyli gdy zmieniamy parametry kontrolne, to istnieje jednak pewna niedostępna część płaszczyzny zachowania się. Reprezentuje ona lokalne maximum energii potencjalnej (rys. 5c).

Poza tym rozumiemy teraz dlaczego stan „maszyny” zależy od drogi, jaką posuwamy ołówek. Ze względu na kształt krzywej opisującej zbiór punktów krytycznych płaszczyzny kontrolnej ten typ katastrofy nazywamy „rozkową”. W „maszynie” Zeemana mamy do czynienia z poczworną katastrofą typu „rożka”, co obserwowaliśmy doświadczalnie. Pierwsze zastosowania Teorii Katastrof polegały na doszukiwaniu się „rożka” we wszystkich możliwych zjawiskach. Niespodziewanie okazało się, że „zakładka” opisuje efekty zdawałoby się pojęciowo bardzo odległe, jak stateczność pływających wież wiertniczych i ... cenzura obyczajowa czasopism w rodzaju „Playboy’a”. My też, oczywiście, będziemy dopatrywali się we wspomnianym na wstępie zjawisku optycznym katastrofy typu „rożka”; widać to przecież gołym okiem! Zaczniemy od zastanowienia się, dlaczego w ogóle cokolwiek tam widzimy? Obraz zawdzięczamy ukośnie padającym promieniom słonecznym, które odbite od wewnętrznej powierzchni naczynia tworzą na denku charakterystyczny obszar. Spróbujmy wyznaczyć równanie kierunku promieni odbitych w rzucie na płaszczyznę denka. Przy założeniu jednostkowego promienia walca otrzymujemy równanie: $(y - \sin\theta)\cos 2\theta = (x - \cos\theta)\sin 2\theta$, (rys. 7a). Jaśniejsza linia jest obwiednią czyli tzw. *powierzchnią kaustyczną* (definicja w Encyklopedii Fizyki). Intuicyjnie rozumiemy, dlaczego jest ona jaśniejsza — patrząc wzdłuż niej widzimy, że im bliżej środka tym więcej promieni pada na coraz mniejszą powierzchnię (rys. 7b). Równanie powierzchni kaustycznej (w tym przypadku jest to linia) znajdujemy różniczkując powyższy wzór względem θ i rozwiązując wynikające stąd równania na x i y :

$$x = \cos\theta - \frac{1}{2} \cos\theta \cos 2\theta, \quad y = \sin\theta - \frac{1}{2} \cos\theta \sin 2\theta.$$

Otrzymujemy parametryczne równanie krzywej znanej jako *nefroida*. Dalej optyka geometryczna zawodzi. Próba wyliczenia natężenia światła w rogu nefroidy prowadzi do nieskończonej wielkości. Ale kształt nefroidy przypomina „rożek” ... Rozważmy zatem rodzinę dróg promieni świetlnych wychodzących z punktu D (rys. 8) i odbitych od punktu o współrzędnej pionowej y w kierunku punktu (X, Y) . Definiujemy rodzinę jednoparametrowych funkcji, sparametryzowanych wartością y . Oczywiście nie wszystkie drogi optyczne są możliwe, w szczególności nie jest możliwa droga przedstawiona na rysunku 8. Zasada Fermata, będąca optycznym odpowiednikiem wspomnianej już zasady Hamiltona, głosi, że „światło przebiegając między dwoma punktami wybiera drogę, do przejścia której potrzebny jest czas ekstremalny, zazwyczaj minimalny”.

Ponieważ $c = \text{const}$, więc zależność na długość dróg optycznych: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, musi być spełniona. Przez P oznaczyliśmy długość drogi światła pomiędzy D a punktem (X, Y) z odbiciem od okręgu. Jeżeli położenie D jest odpowiednio dalekie, to oświetlenie można uważać za równoległe. Niech $-d$ będzie x -ową współrzędną

położenia D , wtedy $P = \left(d - \frac{1}{2} + \sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{\left(X + \frac{1}{2} - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + (Y-y)^2}$.

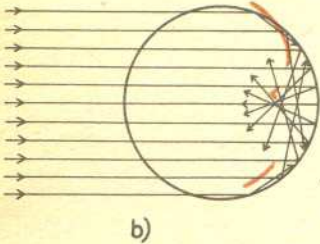
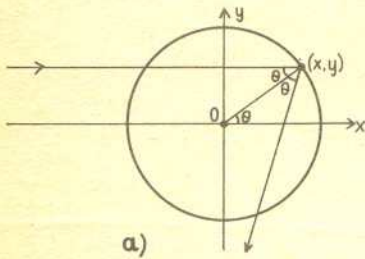
Można obliczyć rozwinięcie funkcji P do rzędu czwartego (skąd to znamy?) w punkcie y oraz pierwszego w (X, Y) otrzymując:

$$\tilde{P} = -\frac{1}{4} (1+5X)y^4 + \frac{1}{2} Yy^3 + Xy^2 - 2Yy + (d+1-X).$$

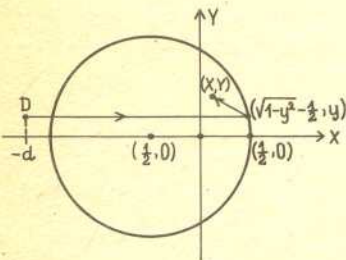
Funkcja \tilde{P} jest równoznaczna ze względu na y w pewnym otoczeniu punktu $(0, 0)$ z funkcją „rożka”, tutaj konkretnie z $-(x^4 + ax^2 + bx)$, gdzie a i b są pewnymi stałymi. Równoznaczność jest gwarantowana przez jeden z najważniejszych lematów Teorii Katastrof. „Rożek” kaustyczny skierowany jest zgodnie z kierunkiem wyznaczonym w optyce geometrycznej. Berry wykazał ponadto w swoich pracach, korzystając z „teorii-katastrofowej” zamiany całkowania po „rożku” na całkowanie po „zakładce”, że natężenie światła w obszarze końca „rożka” nawet w granicy fal krótkich jest skończone. W dowodzie korzysta się z tzw. całki dyfrakcyjnej Fraunhofera. Tak więc trzeba było z górą stu lat, by fizyka i matematyka (a może matematyka i fizyka?) zdołały wyjaśnić prosty, wydawałoby się, efekt optyczny. Świadczy to niewątpliwie o meandrach współczesnej nauki. Czy z chwilą otrzymania potężnego narzędzia, jakim jest Teoria Katastrof, nauka nie znajduje się jednak u progu „jednolitej teorii wszystkiego”???

Raczej nie (Red.)

Nazwa „powierzchnia kaustyczna” przypomina nazwę „soda kaustyczna” czyli żrąca. Promienie słoneczne zbierane przez soczewkę powierzchni kaustycznej (bez uwzględnienia aberracji jest to punkt) potrafią wypalić czyli „wyżreć” otwór w materiale, na którym są skupiane.



Rys. 7



Rys. 8