

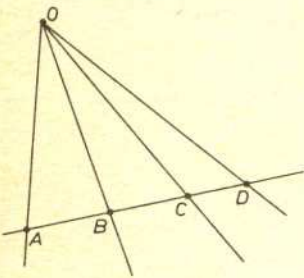
Wybuchy rentgenowskie w kosmosie

Dr Michał

JAROSZYŃSKI



Rozwiązanie zadania M 379. Wystarczy wykazać, że dwustosunek ten da się wyrazić tylko za pomocą kątów utworzonych przez proste OA , OB , OC , OD , gdzie O jest środkiem rzutowania.



Mamy

$$\frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{AO}{\sin \angle ABO}$$

$$\frac{AD}{\sin \angle AOD} = \frac{AO}{\sin \angle ADO}$$

$$\frac{CD}{\sin \angle COD} = \frac{CO}{\sin \angle CDO}$$

$$\frac{CB}{\sin \angle COB} = \frac{CO}{\sin \angle CBO}$$

a więc

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{AO \cdot \sin \angle AOB}{\sin \angle ABO} \cdot \frac{CO \cdot \sin \angle COD}{\sin \angle CDO} \cdot \frac{\sin \angle CBO}{\sin \angle AOB \cdot \sin \angle COD} = \frac{CO \cdot \sin \angle COB}{\sin \angle AOD \cdot \sin \angle COB} \cdot \frac{\sin \angle ADO}{\sin \angle CDO} \cdot \frac{\sin \angle CBO}{\sin \angle ABO}$$

Ponadto, w zależności od kolejności punktów A, C, D na przechodzącej przez nie prostej, kąty $\angle ADO$ i $\angle CDO$ są równe albo przyległe, a więc zawsze $\sin \angle ADO = \sin \angle CDO$.

Podobnie $\sin \angle CBO = \sin \angle ABO$. Zatem

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin \angle AOB \cdot \sin \angle COD}{\sin \angle AOD \cdot \sin \angle COB}$$

Uwaga: Również stosunek anharmoniczny współliniowych punktów A, B i C, D określony przez zastąpienie w definicji dwustosunku odcinków przez wektory, nie zmienia się przy rzutowaniu środkowym. Oczywiście zarówno dwustosunek, jak i stosunek anharmoniczny nie zmieniają się także przy rzutowaniu równoległym.

W końcu roku 1975 odkryte zostało nowe zjawisko astronomiczne: wybuchy rentgenowskie. Do chwili obecnej poznaliśmy około 30 źródeł takich wybuchów. Ich podstawowe cechy są podobne: natężenie promieniowania dochodzącego do nas (a ściślej do umieszczonej na satelitach aparatury rejestrującej) narasta w ciągu 1 sekundy do wartości maksymalnej, a następnie zanika w ciągu kilku-kilkudziesięciu sekund. Maksymalna moc źródła jest około 25000 razy wyższa od mocy Słońca; w jednym wybuchu wyemitowane zostaje tyle energii, ile Słońce wysyła w ciągu 3 dni. Widmo promieniowania i jego moc jest taka, jakby pochodziło ono z kuli o promieniu 10 km, która w ciągu 1 sekundy rozgrzewa się do 30 mln stopni, a potem nieco wolniej stygnie. Oznacza to, że źródło w czasie wybuchu jest 5000 razy gorętsze od Słońca i wobec tego wysyłane przez nie fotony mają tyleż razy wyższą energię. Dlatego należą do rentgenowskiej części widma promieniowania elektromagnetycznego. Wybuchy powtarzają się z mniejszą lub większą regularnością co kilka — kilkanaście godzin, z tym że aktywność niektórych źródeł może zaniknąć na przeciąg tygodni, a nawet miesięcy. Oprócz gwałtownych rozbłysków można też zaobserwować promieniowanie rentgenowskie wysyłane przez te same źródła w sposób ciągły. Natężenie tej ciągłej składowej promieniowania jest o wiele niższe niż w maksimum wybuchu; z drugiej strony wybuchy są stosunkowo rzadkie i jeśli porównać sumaryczną energię wielu wybuchów z energią wypromieniowaną w tym samym czasie w sposób ciągły, to okaże się, że ta ostatnia jest większa i to około stokrotnie! Źródła wybuchów znajdują się w miejscach zajętych w naszej Galaktyce „głównie” przez stare gwiazdy. W paru przypadkach udało się te obiekty zaobserwować przez teleskopy optyczne i na tej podstawie można twierdzić, że ich częścią składową są mało masywne stare gwiazdy.

Powyższy opis zjawiska jest na tyle bogaty, że dość szybko udało się otrzymać modele teoretyczne tłumaczące mechanizm jego powstawania. W ciągu pierwszych miesięcy po odkryciu proponowano dość spekulatywne modele na ogół tłumaczące tylko niektóre cechy zjawiska. Już po roku znana była jednak idea leżąca u podstaw modelu, który opiszemy. Szczegółowe rachunki wykonywane przez parę następnych lat potwierdziły jej słuszność.

Wróćmy teraz do miejsca, w którym opisywaliśmy widmo promieniowania w czasie wybuchu. Użyliśmy tam porównania z gorącą kulą o promieniu 10 km. „Kule” tych rozmiarów znane są w astrofizyce jako gwiazdy neutronowe. Mamy więc silny argument świadczący o tym, że w czasie wybuchu promieniowanie wysyłane jest z powierzchni takiej gwiazdy. Nie wyjaśnia to jeszcze mechanizmu samego wybuchu. Przeciwnie: gwiazdy neutronowe są końcowymi produktami ewolucji gwiazdowej i jako takie nie stanowią niezależnych źródeł energii. (Są ostatecznie skurczone i wychłodzone, a wszystkie możliwe reakcje egzotermiczne „już” w nich zaszły.) Z tym problemem astrofizycy poradzi sobie już wcześniej badając inne źródła rentgenowskie. Wiele z nich to układy gwiazdy neutronowej i masywnej, młodej gwiazdy. Jeśli możliwy jest przepływ materii na gwiazdę neutronową z jej towarzysza (akrecja), to materia ta, spadając w silnym polu grawitacyjnym gwiazdy neutronowej, rozpędza się do prędkości prawie tak dużych jak prędkość światła. Gwałtowne zatrzymanie na powierzchni prowadzi do podgrzewania gazu. Ciepło może być następnie wypromieniowane, a temperatura gazu jest na tyle wysoka, że wysyłane są promienie Roentgena. Domyślamy się, że to samo może zachodzić w interesujących nas obiektach. W tym przypadku ilość materii dostarczonej przez mniej masywną gwiazdę-towarzysza jest mniejsza i wobec tego promieniowanie wysyłane w sposób ciągły jest słabsze. Pomiaru wskazują na istnienie takiej właśnie słabej składowej ciągłej promieniowania w źródłach wybuchowych.

Spadający na gwiazdę neutronową gaz składa się głównie z wodoru i helu. Jądra każdego z tych pierwiastków mogą w odpowiednich warunkach (przy dostatecznie wysokiej temperaturze i gęstości) łączyć się w reakcjach termojądrowych. Powstają wtedy jądra atomowe cięższych pierwiastków i wydzielona zostaje energia. Jądro atomu wodoru to po prostu proton. Wszystkie cięższe pierwiastki zawierają w swych jądrach również neutrony (np. hel — 2 protony i 2 neutrony). Wynika stąd, że reakcje termojądrowe „spalające” wodór muszą część protonów zamienić najpierw na neutrony, aby możliwe było ich wzajemne wiązanie siłami jądrowymi. Proces „zamiany” protonu w neutron jest możliwy. Podobnie jak w rozpadzie neutronu pojawiają się tu jeszcze inne cząstki, a reakcje zachodzą dzięki oddziaływaniom słabym. Ten fakt powoduje, że są one bardzo powolne, o wiele wolniejsze niż np. reakcja łączenia neutronu z protonem siłami jądrowymi. Najwydajniejsze paliwo jądrowe — wodór — okazuje się nieprzydatne dla naszych celów: jak wynika z ilościowej analizy niemożliwy jest sekundowy lub krótszy wybuch z jego udziałem. Zupełnie inaczej ma się rzecz z helem: 3 jądra tego pierwiastka mogą połączyć się dając jądro atomu węgla i niepotrzebne są tu (powolne!) oddziaływania słabe. Dla zapoczątkowania tego procesu trzeba jądra podgrzać hel do kilkuset milionów kelwinów. Jeśli temperatura byłaby jeszcze wyższa — reakcje przebiegałyby znacznie szybciej. Jak powiedzieliśmy, na powierzchnię gwiazdy neutronowej spada gaz. Po zderzeniu z powierzchnią gwiazdy rozgrzewa się on do temperatury kilku milionów stopni — za niskiej na zapoczątkowanie reakcji jądrowych. Gaz zbiera się więc na powierzchni, przy czym jego głębsze warstwy, przyciskane przez leżące wyżej, ulegają ścisnaniu i rozgrzewają się. Im głębiej, tym

wyższa temperatura i gęstość. Na pewnej głębokości możliwe jest „spalanie” wodoru, ale — w związku z tym, co powiedzieliśmy wyżej — nie prowadzi ono do wybuchu. Dopiero gdy temperatura na dnie gromadzącej się warstwy osiągnie kilkaset milionów stopni, możliwe jest zapoczątkowanie reakcji termojądrowych z udziałem helu. Następuje to wówczas, gdy masa zgromadzonego gazu jest taka jak masa miliona km^3 wody — trochę mniej niż w Oceanie Atlantyckim. O sile pola grawitacyjnego gwiazdy neutronowej niechaj świadczy to, że grubość rozważanej warstwy wynosi 2 metry. Materia na jej dnie jest kilkadziesiąt milionów razy gęstsza od wody w Atlantyku...

Zapoczątkowanie spalania helu prowadzi do wydzielania ciepła. Podgrzewa to gaz, który wobec tego lekko się rozpręża. Jego ciśnienie pozostać musi stałe, bo określa je ciężar wyższych warstw materii. Dlatego wzrasta temperatura w warstwie, w której zachodzą reakcje termojądrowe, co jeszcze je przyspiesza. Teraz już nic nie może zatrzymać spalania helu aż do jego wyczerpania. Dokładna analiza pokazuje, że spalanie helu ma charakter krótkotrwałego wybuchu. Przetransportowanie ciepła do powierzchni oraz jego wypromieniowanie zajmuje dalsze kilkanaście sekund. Opisany mechanizm dobrze oddaje własności obserwowanych wybuchów. Ilość materii, która musi się zebrać dla zapoczątkowania wybuchu, jest właśnie taka, że wydzielona w wybuchu energia zgadza się z obserwowaną. (Opisany model mógłby „przewidywać” wybuchy dużo częstsze i słabsze lub rzadsze i silniejsze od obserwowanych. To, że daje wybuchy o obserwowanej energii, jest jego bardzo silnym potwierdzeniem!) Nasuwa się pytanie, dlaczego nie wszystkie źródła promieni Roentgena wybuchają. Jedną z przyczyn może być szybszy niż w naszych modelach przepływ materii prowadzący do wyższych temperatur w gromadzącej się warstwie i wcześniejszego, spokojnego zapalenia się helu. Również silne pola magnetyczne na gwiazdzie neutronowej powodują, że strumień spadającej materii jest wąską strugą, a gromadząca się warstwa ma wyższą temperaturę. Obie powyższe przeszkody w mechanizmie wybuchania napotkać można w układach złożonych z młodych gwiazd. To jest prawdopodobnie przyczyną innego charakteru źródeł rentgenowskich w takich układach.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

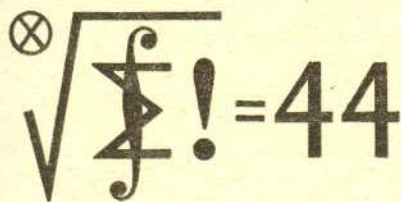
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 3/1984

Jerzy Milczarek - Gorzów Wkp.	45,64pkt
Włodzimierz Szymczyk-Zielonka	45,60pkt
Dariusz Sowizdrzał - Szczecin	44,95pkt
Jerzy Małopolski - Kraków	44,69pkt
Tomasz Komorowski - Świdnik	43,82pkt
Warek Gałecki - Milanówek	43,30pkt
Paweł Kamiński - Warszawa	42,18pkt
Krzysztof Jedziniak - Katowice	42,08pkt
Edward Orzechowski - Warszawa	42,08pkt
Współczynniki trudności zadań 79, 80, 81:	
1,86	3,54 2,16

Klub 44 wzbogacił się o trzy nowe nazwiska: J. Milczarek, W. Szymczyk, J. Małopolski /bowiem D. Sowizdrzał już po raz drugi/ i w ten sposób doбилиśmy do dwudziestki.

Niezwykle zwarta jest grupa przekraczająca metę bądź zbliżająca się do mety. Nigdy dotąd tak nie było, żeby 41 punktów na koncie nie wystarczało do znalezienia się w drukowanej czołówce ligi.

Klub 44

Zadania nr 94, 95, 96

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1984

94. W przestrzeni dane jest n półprostych o wspólnym początku OP_1^+, \dots, OP_n^+ , przy czym $\angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \dots + \angle P_nOP_1 < 360^\circ$. (Symbol $\angle AOB$ oznacza miarę mniejszego z dwóch kątów płaskich o ramionach OA^+, OB^+). Udowodnić, że istnieje półprzestrzeń zawierająca wszystkie te półproste.

95. Rozwiązać w liczbach dodatnich następujący układ n równań z n niewiadomymi x_1, \dots, x_n (n jest daną liczbą naturalną):

$$x_i x_{i+1} = 2^i \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x_n x_1 = 2^n.$$

96. Dla dowolnej liczby naturalnej k oznaczmy przez $s(k)$ sumę jej cyfr (w układzie dziesiętnym). Czy istnieje ciąg liczb naturalnych (a_n) taki, że:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(a_n)}{s(2a_n)} = \infty \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(a_n)}{s(3a_n)} = \infty ?$$

Zadanie 96 przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.