

Granica Roche'a i powierzchnia Roche'a

Dr Tomasz KWAST

Nazwisko francuskiego matematyka Edouarda Roche'a (1820—1883) wiąże się z dwoma zagadnieniami należącymi formalnie do dziedziny mechaniki nieba, a które swoimi konsekwencjami daleko wykraczają poza mechanikę.

Na początek (rys. 1) założmy, że po kole o promieniu A obiega planetę o masie M i promieniu R satelita o masie m i promieniu r synchroniczny (tzn. którego okres obrotu jest równy okresowi obiegu, jak w przypadku naszego Księżyca). Z założenia ruchu po kole wynika, że przyspieszenie odśrodkowe centrum satelity jest równe (co do wartości bezwzględnej) jego przyspieszeniu grawitacyjnemu ze strony planety, czyli

$$\omega^2 A = \frac{GM}{A^2},$$

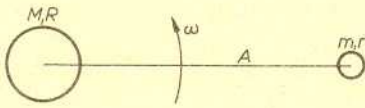
gdzie ω oznacza prędkość kątową satelity, a G stałą grawitacji. Ściśle mówiąc, satelita krąży nie wokół środka planety, lecz wokół środka masy całego układu, czyli po kole o promieniu $AM/(M+m)$, jednak nieścisłość tę można zaniedbać, gdy satelita jest „mały” w stosunku do swojej planety. Tak czy inaczej wypadkowe przyspieszenie środka masy satelity jest równe zeru.

Obliczmy teraz różnicę tych samych przyspieszeń (odśrodkowego i grawitacyjnego) w najbardziej odległym od planety punkcie satelity — będzie to tzw. przyspieszenie przyptywowe Δa . Punkt ten obiega planetę po kole o promieniu $A+r$, zatem

$$\begin{aligned} \Delta a &= \omega^2(A+r) - \frac{GM}{(A+r)^2} = \frac{GM}{A^3}(A+r) - \frac{GM}{\left[A\left(1+\frac{r}{A}\right)\right]^2} \approx \\ &\approx \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2} \frac{r}{A} - \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2} 2 \frac{r}{A} = 3 \frac{GM}{A^3} r. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z liniowego przybliżenia $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-2x$, gdzie x oznacza wielkość małą względem jedności. Analogiczny rachunek dla punktu satelity leżącego najbliżej planety dowodzi, że przyspieszenie przyptywowe w nim wynosi $-\Delta a$. Satelita jest zatem rozciągany w kierunku prostej łączącej go z planetą, gdyby więc był ciekły, to nie mógłby zachować kształtu kulistego, w ogóle zaś może utrzymać się w całości, gdy Δa nie przekracza jego własnego przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni, czyli gdy

$$3 \frac{GM}{A^3} r < \frac{Gm}{r^2}, \quad \text{skąd } A^3 > 3 \frac{M}{m} r^3.$$



Rys. 1



4. Współrzędne czasoprzestrzenne

Wynik doświadczenia Michelsona i Morleya nie oznacza, że trzeba odrzucić ideę eteru. Proponowano kilka wyjaśnień, które „ratowały” eter. Jednak część z nich okazała się niezgodna z wynikami innych eksperymentów, a pozostałe wymagały przyjęcia wzajemnie sprzecznych własności eteru. Niezależnie od powodzenia tych prób warto zauważyć, że założenie istnienia eteru oznacza rezygnację z przeniesienia zasady względności na zjawiska elektromagnetyczne.

Wszystkie współczesne eksperymenty są zgodne z dwoma postulatami, na których opiera się szczególnie teoria względności:

1. Żaden z inercjalnych układów współrzędnych nie jest wyróżniony.
2. Światło niezależnie od kierunku, w którym się rozchodzi, ma (w próżni) względem dowolnego inercjalnego obserwatora tę samą prędkość.

Pierwszy postulat jest rozszerzeniem zasady względności Galileusza na wszystkie zjawiska fizyczne. Drugi natomiast nadaje wyjątkowe znaczenie prędkości światła. Prędkości wszystkich innych obiektów są względne, tj. zależą od prędkości i kierunku ruchu obserwatora. Prędkość światła jest dla każdego obserwatora taka sama.

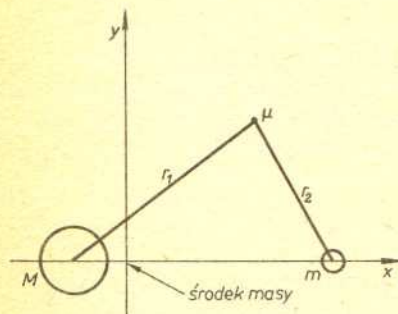
Do tej pory zakładaliśmy, że każdemu obserwatorowi inercjalnemu można przypisać pewien układ współrzędnych w czasoprzestrzeni. Trzeba jednak pamiętać, że obserwator powinien taki układ „zbudować”, tj. opracować metodę doświadczalnego wyznaczania czasu i miejsca dowolnego zdarzenia.

Założmy, że płaszczyzna kartki to nasza dwuwymiarowa czasoprzestrzeń, w której linie świata światła reprezentowane są przez proste nachylone pod kątem 45° do krawędzi kartki.

Przy równych gęstościach satelity i planety daje to warunek na istnienie satelity

$$A > \sqrt[3]{3} R.$$

Tak „odkryliśmy” istnienie najmniejszej odległości od planety, poniżej której satelita (ciekły!) musi zostać rozerwany przez siły przyływowe. Jest to tzw. granica Roche’a. Wynik nasz jest co prawda ilościowo zły, ale dokładniejsze obliczenia prowadzą tylko do innego współczynnika przy R , mianowicie równego 2,455. Najważniejszy wniosek jest ten sam — ciekły satelita może istnieć tylko poza granicą Roche’a. Naszemu Księżycowi (nawet gdyby był ciekły) nic nie grozi ze strony Ziemi — całe szczęście! Ale np. pierścienie Saturna leżą całkowicie poniżej granicy Roche’a dla Saturna. Nasuwa się więc możliwość, że może powstały one w wyniku rozerwania jakiegoś ciała, które za bardzo zbliżyło się do Saturna — niestety, nie mamy na razie pewności, czy było tak rzeczywiście.



Rys. 2

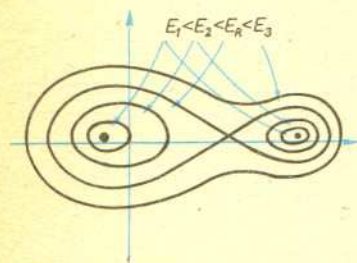
A teraz zupełnie inny problem. Niech nadal po kole obiegają się dwa ciała o masach M i m , a w ich wspólnym polu grawitacyjnym niech porusza się cząstka o znikomej masie μ , tzn. nie zakłócająca ruchu dwóch ciał „ciężkich”. Ruch tej cząstki wygodnie jest przedstawiać w układzie współrzędnych wirującym wraz z masami ciężkimi, czyli np. tak, by masy te stałe leżały na osi x (rys. 2). Ruch cząstki może być bardzo skomplikowany, z góry jednak możemy przewidzieć, że jej całkowita energia cały czas musi być stała. Wyrażenie na energię w tym wirującym (a więc nieinercjalnym!) układzie współrzędnych ma postać

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{GM}{r_1} - \frac{Gm}{r_2}.$$

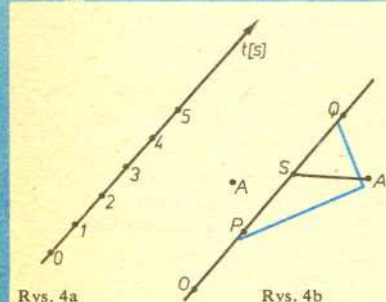
Pierwszy składnik jest energią kinetyczną, drugi uwzględnia, że układ współrzędnych wiruje (jest to potencjał przyspieszenia odśrodkowego), a dwa pozostałe to energie potencjalne względem obu mas. Skoro energia kinetyczna jest z natury rzeczy ograniczona od dołu wartością równą zero, to suma trzech pozostałych składników musi mieć (przy konkretnej energii całkowitej, lub inaczej — przy konkretnych warunkach początkowych ruchu) ograniczenie od góry. Oznacza to, że ruch cząstki może odbywać się tylko wewnątrz odpowiedniej powierzchni ekwipotencjalnej (zwanej też powierzchnią zerowej prędkości), czyli w obszarze, w którym

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{GM}{r_1} + \frac{Gm}{r_2} > -E.$$

Gdy energia całkowita E ma dużą wartość ujemną, warunek ten może zostać spełniony albo dostatecznie daleko od całego układu (o czym dalej nie będziemy mówić, gdyż nie jest to istotne dla tytułowego zagadnienia), albo dostatecznie blisko którejś z mas (np. wewnątrz powierzchni oznaczonej E_1 na rys. 3). Przy większej energii (E_2) obszary dozwolone dla ruchu wokół mas są większe, wreszcie przy pewnej jej wartości (E_R) łączą się w jednym punkcie tworząc tzw. powierzchnię Roche’a. Przy energii jeszcze większej (E_3) powierzchnia zerowej prędkości ma już postać biskopata lub hantli.



Rys. 3



Rys. 4a

Rys. 4b

Rys. 4c

Narysujmy linię światła obserwatora w poruszającym się swobodnie statku kosmicznym i zdarzenie A , którego współrzędne czasoprzestrzenne chce wyznaczyć (rys. 4a). Linia światła kosmonauty jest jednocześnie osią czasu jego układu współrzędnych wyskalowaną przez wskazania jego zegara. Kosmonauta może wysyłać i odbierać sygnały świetlne. Niech zdarzenie A polega na odbiciu sygnału wysłanego w P . Odbity sygnał został odebrany w Q (rys. 4b). Jedyna dostępna obserwatorowi informacja to wskazania zegara w Q i P . Ponieważ prędkość światła nie zależy od ruchu obserwatora, jest ona w kierunku „tam” taka sama jak „z powrotem”. Czas ruchu impulsu do chwili odbicia jest równy połowie czasu,

jaki upłynął od P do Q (Czytelnikowi pozostawiamy szczegółowe uzasadnienie tego wniosku). Zdarzenie S dzielące odcinek PQ na połowy jest więc równoczesne — według kosmonauty — ze zdarzeniem A . Przypisze on zdarzeniu A wskazanie swojego zegara w punkcie S .

Odległość zdarzenia A od obserwatora jest równa drodze, którą przebędzie światło w czasie między zdarzeniami P i Q . Naturalnymi jednostkami odległości są tu sekundy świetlne. Prędkość w tych jednostkach jest wielkością bezwymiarową. Łatwo wykazać, że odległość (w sekundach świetlnych) zdarzenia A od obserwatora jest równa długości odcinka SA , a wszystkie zdarzenia równoczesne z S tworzą prostą, do której należą ten odcinek. Prosta ta może pełnić rolę osi odległości od obserwatora. Prześnijmy ją równoległe od punktu O , w którym zegar wskazuje czas zerowy. To, co otrzymaliśmy, jest poszukiwanym układem współrzędnych w czasoprzestrzeni (rys. 4c).

Czytelnikowi pozostawiamy do wykazania, że: 1) wszystkie zdarzenia, które obserwator uważa za równoodległe, leżą na prostej równoległej do osi czasu i 2) linia światła światła przechodząca przez O jest dwusieczną kąta między osią czasu i osią odległości. (cdn.)

Na konkurs napłynęło 30 odpowiedzi /w tym jedna jako wydruk z mikrokomputera/, większość prawidłowych. Zupełnie poprawnie stwierdziło co robią algorytmy 17 uczestników. Nagrody wylosowali:

Jerzy Chmiel z Głuchołaz,
Tomasz Rawlik z Gliwic,
Adam Olejnik z Wąbrzeźna.

Pierwszy z algorytmów podawał liczbę jedynek w dwójkowym rozwinięciu liczb od 1 do 2^N-1 . Drugi wypisywał /w kolejności "alfabetycznej"/ podzbiory zbioru $\{1, \dots, N\}$. Trzeci obliczał wartość wielomianu $a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N$ w punkcie x . Czwarty mnożył liczby M i N .

Najwięcej kłopotów sprawił Czytelnikom pierwszy algorytm.

Powierzchnią Roche'a jest więc taka powierzchnia zerowej prędkości, która przy możliwie najmniejszej energii cząstki dopuszcza jej przejście z sąsiedztwa jednej masy do sąsiedztwa drugiej masy. Ma to ogromne znaczenie przyrodnicze. Np. statek kosmiczny może (przynajmniej teoretycznie) dolecieć w pobliże Księżyca, okrążyć go i wrócić na Ziemię bez użycia silnika, jeżeli tylko obszar jego dozwolonego ruchu odpowiada jakiejś energii E_3 nie mniejszej od E_R . To samo dotyczy niezwykle ważnego we współczesnej astronomii zagadnienia przepływu materii między składnikami podwójnego układu gwiazd. Formalnie w każdym układzie podwójnym (tzw. rozdzielonym) znajdują się cząstki (atomy wylatujące z powierzchni gwiazd) na tyle energetyczne, że obszar ich ruchu dozwolonego będzie większy niż wewnątrz powierzchni Roche'a. Zazwyczaj ich liczba jest tak znikoma, że o przepływie materii nie ma mowy. Liczba tych cząstek gwałtownie wzrasta, gdy jedna z gwiazd w trakcie ewolucji spęcznieje tak, że prawie wypełni swoją część powierzchni Roche'a. Wtedy bowiem cząstki startujące z powierzchni tak rozdętej gwiazdy mają od razu energię zbliżoną do E_R , jest ich bardzo dużo i znaczny ich procent ma energię większą od E_R . Z gwiazdy tej płynie wtedy w stronę jej towarzyszkę po prostu strumień materii. Przypomina to strumień powietrza wypływający z przekłutego balonika, widzimy jednak, że mechanizm powstawania tego strumienia jest zupełnie inny. Takie gwiazdy podwójne (są to tzw. układy półrozdzielone) są w Galaktyce bardzo liczne, a przykładem może być znany układ Algola. Wreszcie może się zdarzyć, że obie gwiazdy wypełniają powierzchnię Roche'a — każda swoją część. Tworzą one wtedy tzw. układ kontaktowy wytwarzający wspólną otoczkę o kształcie odpowiadającym energii E_3 niewiele większej od E_R . Obiekt taki wygląda właściwie jak dziwaczna jedna gwiazda z przewężeniem.



Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 398. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje niepusty, skończony zbiór S punktów płaszczyzny, o tej własności, że dla każdego punktu $A \in S$ dokładnie n punktów zbioru S jest odległych od A o 1.

Rozwiązanie na str. 10

M 399. Danych jest 100 liczb a_1, a_2, \dots, a_{100} spełniających warunki:

$$a_1 - 8a_2 + 7a_3 \geq 0$$

$$a_2 - 8a_3 + 7a_4 \geq 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{99} - 8a_{100} + 7a_1 \geq 0$$

$$a_{100} - 8a_1 + 7a_2 \geq 0.$$

Znaleźć a_2, a_3, \dots, a_{100} , jeśli wiadomo, że $a_1 = 1$.

Rozwiązanie na str. 10.

M 400. W rogach szachownicy 3×3 stoją skoczki: w górnych rogach białe, w dolnych czarne. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebnych do przestawienia białych skoczków w dolne rogi szachownicy, a czarnych w górne?

Rozwiązanie na str. 11

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 172. Zgodnie z prawem Ohma natężenie pola elektrostatycznego w dowolnym punkcie wewnątrz przewodnika, w którym płynie prąd stały, jest proporcjonalne do gęstości prądu w tym punkcie. Źródłem pola są ładunki gromadzące się na powierzchni przewodnika po włączeniu prądu. Na przykład na powierzchni nieskończonego przewodzącego pręta gromadzi się ładunek, którego gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości od pewnego przekroju S_0 (rysunek). Udowodnić, że przy takim rozkładzie ładunku pole elektrostatyczne wewnątrz pręta jest jednorodne.

Rozwiązanie na str. 10

F 173. Przy przekazywaniu energii elektrycznej na duże odległości podwyższa się za pomocą transformatora napięcie tak, by przy tej samej przesyłanej mocy natężenie prądu zmalało. Zmniejsza się w ten sposób straty energii, ponieważ zgodnie z prawem Joule'a-Lenza ilość wydzielonego w jednostce czasu ciepła jest równa $Q = I^2 R$, gdzie I — natężenie prądu,

R — oporność przewodów. Z drugiej strony jednak $Q = \frac{U^2}{R}$, tj. straty rosną ze wzrostem

napięcia U . Wyjaśnić, dlaczego buduje się wysokonapięciowe linie przesyłowe.

Rozwiązanie na str. 2

