Oznaczmy przez $\varphi(n)$ liczbę liczb naturalnych nie przekraczających n i względnie pierwszych z n.

Twierdzenie Eulera. Jeśli a i n są względnie pierwsze, to $a^{\varphi(n)}-1$ dzieli się przez n.

Dowód. Rozpatrzmy reszty r_i z dzielenia liczb $m_i \cdot a$ przez n, gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_{\varphi(n)}$ są naturalne, względnie pierwsze z n i mniejsze od n.

Mamy więc

$$\begin{array}{rcll} m_1 a & = & p_1 \cdot n & + r_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \qquad 1 \leqslant r_i < n. \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ m_{\varphi(n)} a & = & p_{\varphi(n)} \cdot n & + r_{\varphi(n)}, \end{array}$$

Gdyby r_i miało wspólny czynnik z n, to m_i lub a miałoby wspólny czynnik z n, a to jest niemożliwe. Dalej $r_i = r_j$ dla $i \neq j$ daje:

$$(m_i - m_j) \cdot a = (p_i - p_j) \cdot n.$$

Ponieważ a jest względnie pierwsze z n, $m_i - m_j$ dzieliłoby się przez n, co jest niemożliwe dla $1 \leqslant |m_i - m_j| < n$. Wobec tego r_i są różne, względnie pierwsze z n i $1 \leqslant r_i < n$ dla $i = 1, 2, \ldots, \varphi(n)$, czyli zbiory $\{r_1, \ldots, r_{\varphi(n)}\}$ i $\{m_1, \ldots, m_{\varphi(n)}\}$ są równe.

Mnożąc wszystkie równości stronami otrzymujemy
$m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\varphi(n)} \cdot a^{\varphi(n)} = (p_1 n + r_1) \cdot \ldots \cdot (p_{\varphi(n)} n + r_{\varphi(n)}) =$
$= pn + r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(n)}$. Ponadto $r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(n)} = m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\varphi(n)}$.
Zatem $m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\varphi(n)} \cdot (a^{\varphi(n)} - 1)$ dzieli się przez n.
Ponieważ $m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\varphi(n)}$ i n są względnie pierwsze, ostatecznie $a^{\varphi(n)} - 1$ dzieli się przez n, c.n.d.

W szczególności zachodzi

Małe Twierdzenie Fermata. Jeśli p jest liczbą pierwszą i a nie dzieli się przez p, to

$$a^{p-1} - 1 \text{ dzieli się przez } p.$$

Zadania

1. Udowodnić, że dla każdej liczby nieparzystej $n > 1$ istnieje taka liczba naturalna $d < n$, że liczba $2^d - 1$ jest podzielna przez n.

(zadanie 9 z zawodów I stopnia XXI Olimpiady)

2. Udowodnić, że nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że liczba $2^n - 1$ dzieli się przez n.

(3—II—XXI)

3. Dowieść, że w ciągu $\{2^n - 3\}$, gdzie $n = 2, 3, 4, \ldots$, istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każde dwie są względnie pierwsze.

(zadanie 3 z XIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej)

4. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba

$$\underbrace{11\ldots1}_{p\,\text{cyfr}}\ \underbrace{22\ldots2}_{p\,\text{cyfr}}\ \ldots\ \underbrace{99\ldots9}_{p\,\text{cyfr}} - 123456789$$

dzieli się przez p.

(2—I—XXXIII)

dr Rafał SZTENCEL

Rozwiązanie zadania F 190. Badanie charakterystyk sprowadza się do zewienia układu (rys. 1); wskazania mierników (idealnych) wyznaczają parę wielkości (U_p, I_p) stanowiącą tzw. punkt pracy obwodu i jednocześnie jeden z punktów charakterystyki prądowo-napięciowej badanego elementu. Dla źródła liniowego (SEM — $\mathscr{E}$ i opór wewnętrzny r nie są wzajemnie zależne), np. dla naszego pojedynczego ogniwa mamy

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}; \quad R \text{ — opór statyczny elementu.}$$

Przekształcając

$$\underbrace{I \cdot R}_{\substack{U \\ \text{napięcie na} \\ \text{zaciskach} \\ \text{źródła}}} + \underbrace{I \cdot r}_{\substack{U_w \\ \text{napięcie na} \\ \text{oporze we-} \\ \text{wnętrznym} \\ \text{źródła}}} = \mathscr{E},$$

lub inaczej

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r} - \frac{1}{r} U. \tag{1}$$

Ta funkcja $I = f(U)$ jest tzw. charakterystyką źródła i odcina na osiach współrzędnych punkty

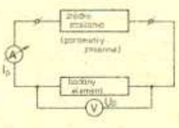
$$I = I_z = \frac{\mathscr{E}}{r} \text{ (prąd zwarcia źródła)}$$

$$U = \mathscr{E}$$

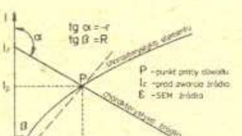
(interpretacja graficzna — rys. 2).
Dla badanego elementu obowiązuje równość

$$I = \frac{1}{R} U. \tag{2}$$

Punkt wspólny zależności (1) i (2) wyznacza punkt pracy obwodu. Zmieniając kolejno (lub równocześnie) parametry źródła zasilania $\mathscr{E}$ i r uzyskuje się kolejne punkty charakterystyki badanego elementu.



Rys. 1



Rys. 2

Łącząc równolegle k ogniw mamy

SEM baterii $\quad \mathscr{E}_B = \mathscr{E} = \text{const},$

Opór wewnętrzny baterii $\quad r_B = \frac{r}{k},$

Prąd zwarcia baterii $\quad I_{zB} = k\frac{\mathscr{E}}{r} = kI_z.$

[przypadek a)]

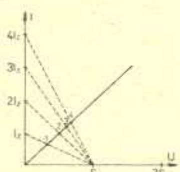
Dla połączenia szeregowego n ogniw odpowiednie wielkości są równe

$$\mathscr{E}_B = n\mathscr{E},$$
$$r_B = nr,$$
$$I_{zB} = \frac{\mathscr{E}}{r} = I_z = \text{const.}$$

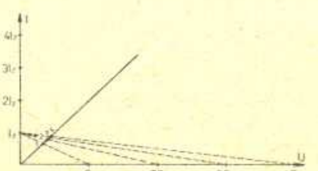
[przypadek b)]

Zestawiając natomiast n równoległych serii po n źródeł połączonych w szereg uzyskuje się

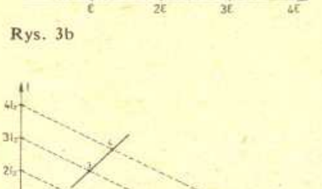
$$\mathscr{E}_B = n\mathscr{E},$$
$$r_B = r,$$
$$I_{zB} = nI_z.$$



Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c

Na rys. 3a, 3b, 3c pokazane są dostępne pomiarom punkty 1, 2, 3, ... charakterystyki elementu liniowego. W praktyce dostosowuje się typ źródła (np. układ potencjometryczny, zmienny opornik połączony szeregowo ze źródłem stałego napięcia itp.) do cech indywidualnych badanego elementu tak, by uzyskać możliwie najwięcej punktów pomiarowych w interesującym zakresie. Właściwy dobór jest szczególnie istotny w przypadku elementów o charakterystyce nieliniowej.