Kącik olimpijski

dr Marek KORDOS

Bardzo prostym wnioskiem z twierdzenia Talesa jest następujący fakt:

Niech ABC będzie trójkątem, a punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych AB, BC i CA. Wówczas

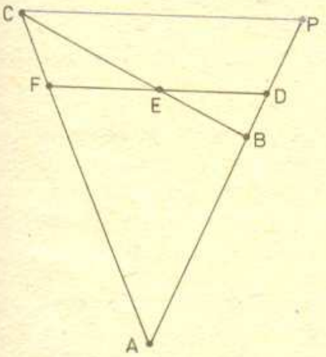
a) punkty D, E i F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = -1,$$

b) proste CD, AE i BF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1.$$

Twierdzenie a) nazywa się twierdzeniem Menelausa, a b) — Cevy.



Aby wykazać konieczność warunku z twierdzenia Menelausa, załóżmy, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej i dorysujmy na prostej AB taki punkt P, że $PC \parallel DF$. Z twierdzenia Talesa w trójkątach CAP i CBP otrzymujemy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DP}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}} \quad \text{i} \quad \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}}.$$

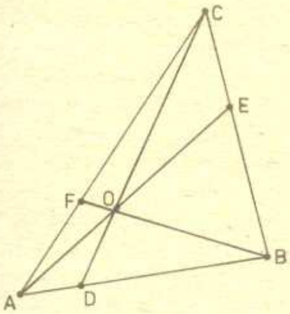
Mnożąc stronami otyrzmujemy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DP}}\cdot\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}}\cdot\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{AF}} = 1.$$

Zmieniając zwrot trzech wektorów ($\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC}$ i $\overrightarrow{AF}$) otrzymujemy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = -1.$$

Dowód dostateczności łatwo uzyskać przez zaprzeczenie.



Aby wykazać konieczność warunku z twierdzenia Cevy, załóżmy, że proste CD, AE i BF przecinają się w punkcie O. Stosując twierdzenie Menelausa do trójkątów CDB i CDA otrzymujemy

$$\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = -1 = \frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{BA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}},$$

skąd mamy $\dfrac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{AF}} = 1.$

Zmieniając zwrot czterech wektorów ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{FC}$ i $\overrightarrow{AF}$) otrzymujemy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1.$$

Dostateczności również dowodzimy przez zaprzeczenie.

Twierdzenia te są bardzo pomocne w rozwiązywaniu wielu zadań.

1) W trójkącie ABC na boku BC leży punkt M, na boku AC leży punkt N, a odcinki AM i BN przecinają się w punkcie P.

Mając dane stosunki $BM : MC = m$ i $AN : NC = n$ obliczyć stosunki $AP : PM$ i $BP : PN$.

(I etap III Olimpiady)

2) Przez punkt M dany na przedłużeniu boku AB trójkąta ABC poprowadzić prostą przecinającą boki AC i BC w punktach N i P w taki sposób, żeby odcinki AN i BP były równe.

(I—IV)

3) Jaki warunek powinny spełniać kąty trójkąta ABC, żeby dwusieczna kąta A, środkowa poprowadzona z wierzchołka B i wysokość poprowadzona z wierzchołka C przecinały się w jednym punkcie?

(III—XIII)

4) Dowieść, że prosta symetryczna do środkowej CS trójkąta ABC względem dwusiecznej kąta C tego trójkąta dzieli bok AB na odcinki proporcjonalne do kwadratów boków AC i BC.

(I—XIII)

Rozwiązanie zadania F 194. Ponieważ oporność pierścienia jest równa zeru, więc i całkowita siła elektromotoryczna powinna być zawsze równa zeru. W przeciwnym przypadku w pierścieniu popłynąłby prąd o nieskończonym natężeniu.
Siła elektromotoryczna jest równa zeru, jeśli nie zmienia się całkowity strumień indukcji pola magnetycznego przez pierścień (suma pola zewnętrznego i pola prądu indukowanego w pierścieniu). Wynika stąd, że strumień po wyłączeniu pola będzie nadal równy Φ_0.