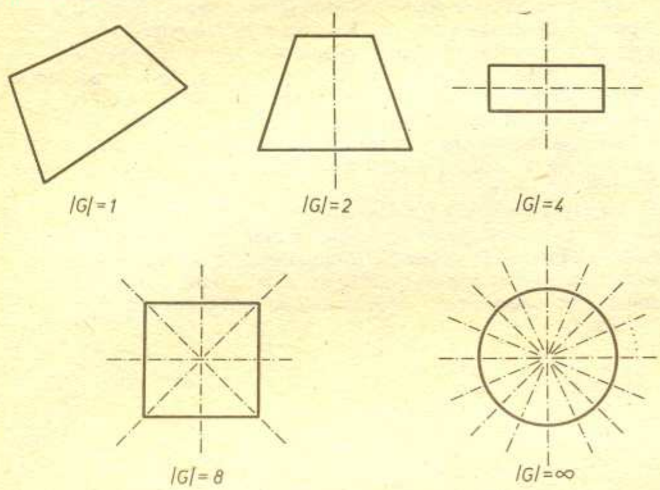
Czy geometrzy znają wszystkie grupy?

Dr Zbigniew MARCINIAK

Z pojęciem grupy spotykamy się na lekcji geometrii. Dla zadanej figury, np. wielokąta, wyróżniamy zbiór tych izometrii płaszczyzny, które zachowują naszą figurę. Zbiór ten tworzy grupę, ze składaniem przekształceń jako działaniem grupowym. Pozwala ona mierzyć symetryczność rozważanego obiektu: im bardziej symetryczny, tym bogatsza jest jego grupa.

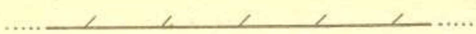
Niech w zbiorze G będzie określone działanie dwuargumentowe i wyróżniony element e. Zbiór G nazwiemy grupą, jeśli spełnione są warunki:
a) $a(bc) = (ab)c$,
b) $ae = ea = a$,
c) dla każdego $a \in G$ istnieje $a' \in G$ taki, że $aa' = a'a = e$.
Jeśli ponadto dla dowolnych $a, b \in G$ zachodzi $ab = ba$, to grupę nazywamy przemienną.



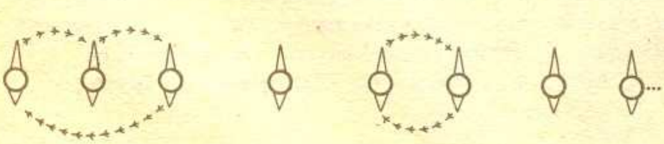
$|G|$ oznacza liczbę elementów w grupie G.

Podobnie możemy badać grupy symetrii brył, a nawet figur wyżej wymiarowych.

Można też rozważać zadanie odwrotne: mamy opisaną grupę G, czy istnieje figura F, dla której G jest grupą izometrii. Jeśli ją znajdziemy, to mówimy, że zrealizowaliśmy G jako grupę izometrii figury F. Np. grupę liczb całkowitych z dodawaniem można zrealizować jako grupę izometrii następującej figury.



Przykłady grup można też uzyskiwać na różnych drogach, na przykład tak. Niech N oznacza zbiór liczb naturalnych. Permutację σ: N → N nazwiemy leniwą, jeśli mamy $\sigma(n) \neq n$ tylko dla skończenie wielu liczb n. Inaczej mówiąc, σ zostawia prawie wszystko po staremu. Łatwo sprawdzić, że zbiór permutacji leniwych tworzy grupę ze względu na składanie przekształceń. Oznaczamy ją S_∞. Jest ona dobrym modelem opisującym zachowanie (nieskończonego) stada wron, które siedzą rzędem na śniegu — co jakiś czas kilka spośród nich zamienia się miejscami. A oto widok z góry po takiej zamianie:



Ślady na śniegu znaczą sposób poruszania się wron, czyli opisują pewną permutację leniwą. Ślady te układają się w zamknięte wianuszki, co matematycy zwykli nazywać rozkładem permutacji na cykle.

Grupa S_∞ ma ciekawą własność: wszystkie istniejące na świecie grupy skończone są jej podgrupami.

Podgrupą grupy G nazywamy podzbiór w G, który jest grupą względem mnożenia w G.

Zastanówmy się nad następującym pytaniem: czy grupa S_∞ mogła się pojawić na lekcji geometrii? Innymi słowami, czy można zrealizować S_∞ jako grupę izometrii pewnej figury w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. To nic, że dla $n \geqslant 4$ nie potrafimy sobie wyobrazić przestrzeni n-wymiarowej. Dla nas E^n jest po prostu zbiorem n-tek liczb rzeczywistych: $(x_1, \ldots, x_n)$, podobnie jak płaszczyznę zwykliśmy utożsamiać ze zbiorem par (x_1, x_2). W E^n możemy uprawiać geometrię, np. mierzyć odległość wzorem $[(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2]^{1/2}$.

Ponieważ nie widać oczywistej odpowiedzi na nasze pytanie, spróbujemy zanurzyć S_∞ w izometrie „po kawałku". Dla $k = 2, 3, \ldots$ oznaczmy przez S_k podzbiór S_∞ składający się z tych permutacji, które nie ruszają $k+1, k+2, \ldots$ Oczywiście S_k są skończonymi podgrupami grupy S_∞, która jest ich mnogościową sumą.

Nie ma kłopotu z realizacją geometryczną grupy S_k. Możemy ją bowiem zanurzyć w grupę izometrii przestrzeni E^k: żądamy, by permutacja σ działała według wzoru $\sigma(x_1, \ldots, x_k) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$. (Oczywiście są to izometrie — patrz: wzór na odległość!)

Zadanie. Zrealizować grupę S_3 za pomocą izometrii płaszczyzny.

Niestety, nie jest to droga, która nas może doprowadzić do celu: przecież wymiar przestrzeni rośnie, gdy zanurzamy coraz większe podgrupy S_k. My chcielibyśmy, żeby cała grupa S_∞ siedziała w izometriach jednej, skończenie wymiarowej przestrzeni.

Ustalmy więc E^n i zbadajmy, jakie warunki spełniają podgrupy izometrii tej przestrzeni. Po pierwsze zauważmy, że liczba elementów w grupie nie ma znaczenia. Istotnie, dla dowolnej liczby naturalnej m obroty wokół ustalonej prostej o wielokrotności kąta $\alpha = 360°/m$ tworzą grupę o m elementach. Nie jest też przeszkodą do zanurzenia w izometrie nieprzemienność grupy. Istotnie, wynik złożenia przekształceń zwykle zależy od kolejności ich wykonania (pomyśl o wkładaniu skarpetek i butów). Na przykład: grupa symetrii trójkąta równobocznego nie jest przemienna.

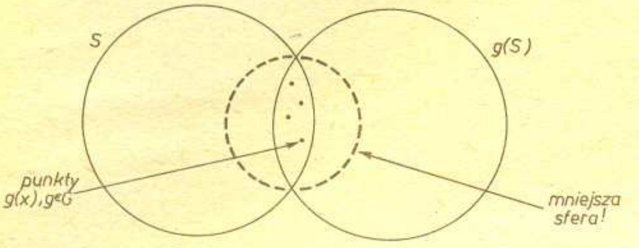
Zadanie. Ile elementów będzie miała grupa złożona z obrotów o całkowite wielokrotności kąta $\sqrt{2} \cdot 360°$?

Naprawdę istotną własność odkrył Kamil Jordan w 1878 roku: skończona podgrupa izometrii E^n musi mieć „dużą" podgrupę przemienną. Dokładniej

Twierdzenie. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka stała c_n, że dowolna skończona grupa G izometrii przestrzeni E^n ma przemienną podgrupę A spełniającą nierówność $|G|/|A| \leqslant c_n$.

Podkreślmy, że stała c_n nie zależy od grupy G, więc im większa jest grupa izometrii, tym większą grupę przemienną musi ona zawierać.

A oto szkic dowodu twierdzenia Jordana. Zauważmy najpierw, że istnieje punkt w E^n, którego nie porusza żadna izometria z grupy G. W tym celu bierzemy dowolny punkt $x \in E^n$ i rozważamy sferę $S(r)$ o możliwie najmniejszym promieniu r, obejmującą wszystkie punkty postaci $g(x)$, gdzie $g \in G$. Poniższy obrazek dowodzi, że zachodzi równość $g(S(r)) = S(r)$ dla wszystkich $g \in G$.



Środek sfery $S(r)$ jest szukanym punktem stałym. Umieszczamy w nim początek prostokątnego układu współrzędnych.

Dowolne przekształcenie ciągłe f przestrzeni E^n w siebie odwzorowuje sferę $S(1)$ o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych na zbiór $f(S(1))$. Oznaczmy przez $||f||$ odległość najdalszego punktu z $f(S(1))$ od początku układu.

Zadanie: dla dowolnych przekształceń f, g zachodzi
i) $||f \pm g|| \leqslant ||f|| + ||g||$,
ii) $||f \circ g|| \leqslant ||f||\,||g||$,
iii) jeśli a jest izometrią, to $||a \circ f|| = ||f \circ a|| = ||f||$.

Liczbą $||a-b||$ będziemy mierzyć odległość między izometriami a i b.

Kluczowy argument jest taki: jeśli izometrie a, b są blisko identyczności, to muszą być przemienne: $ab = ba$. Oznaczmy $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Mamy dla $[a, b] \neq id$

$$||id - [a, b]|| = ||ab - ba|| = ||(id-a)(id-b) - (id-b)(id-a)|| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,||id-a|| \cdot ||id-b||.$$

Jeśli teraz założymy, że $||id-a|| < 1/2$, to $||id-[a, b]|| < ||id-b||$. Podstawiając w miejsce b kolejno $b_1 = [a, b]$, $b_2 = [a, [a, b]]$, $b_3 = [a, [a, [a, b]]]$ ... dostajemy malejący ciąg liczb

$$||id-b|| > ||id-b_1|| > ||id-b_2|| > ||id-b_3|| > \dots$$

Ale te liczby mierzą odległość między identycznością i elementami b_i skończonej grupy G. Zatem któraś z nich jest zerem. Jeśli jest to b_1, to $||id-[a, b]|| = 0$; stąd $[a, b] = id$ i $ab = ba$. W ogólnym przypadku dostajemy $b_k = id$ dla pewnego k, ale wtedy można wykazać, że także $b_{k-1} = \dots = b_1 = id$.

Łatwo teraz o podgrupę przemienną: zdefiniujemy A jako najmniejszą podgrupę, zawierającą wszystkie izometrie $g \in G$, które spełniają warunek $||g-id|| < 1/2$.

Aby znaleźć stałą Jordana, każdej izometrii $g \in G$ przypiszemy n^2 liczb. Bierzemy wersory naszego układu współrzędnych: $v_1, \dots, v_n$ i wypisujemy kolejno współrzędne ich obrazów:

$$g(v_i) = (g_{i1}, \dots, g_{in}).$$

Ponieważ wektor $g(v_i)$ pozostał na sferze $S(1)$, to $|g_{ij}| \leqslant 1$. Otrzymaliśmy w ten sposób włożenie grupy G w kostkę n^2-wymiarową:

$$G \to \langle -1, 1\rangle^{n^2},$$
$$g \mapsto (g_{11}, \dots, g_{nn}).$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi nierówność:
$||g-h|| \leqslant n\sqrt{n}\max\{|g_{ij}-h_{ij}|\}$.

Dzielimy teraz kostkę $\langle -1, 1\rangle^{n^2}$ na małe kosteczki o boku $1/(2n^2+1)$. Jest ich więc $c_n = (4n^2+2)^{n^2}$. To jest szukana stała.

Zadanie. Jeśli A jest podgrupą w G, to $|G|/|A|$ jest równe maksymalnej liczbie takich elementów $g_1, \dots, g_N \in G$, że dla $i \neq j$ mamy $g_i g_j^{-1} \notin A$.

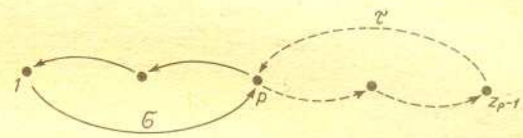
Weźmy $g_1, \dots, g_N \in G$ i $N > c_n$. Wtedy obrazy (przy włożeniu w kostkę) dwóch elementów g_i, g_j leżą w tej samej małej kosteczce, więc

$$||g_i g_j^{-1} - id|| = ||g_i - g_j|| \leqslant n \cdot \sqrt{n} \cdot 1/(2n^2+1) < 1/2,$$

a zatem $g_i g_j^{-1} \in A$. Na mocy zadania $|G|/|A| \leqslant c_n$. □

Wszystkie znane dowody twierdzenia Jordana dają znacznie zawyżone wartości c_n. Najlepsze oszacowanie nie jest znane.

Mimo tego możemy teraz pokazać, że grupa S_∞ nie da się zrealizować geometrycznie w żadnej przestrzeni E^n. Gdyby to było możliwe, to wybralibyśmy liczbę pierwszą $p > c_n + 1$ i rozważyli podgrupę $S_{2p-1} \subset S_\infty$. Na mocy twierdzenia Jordana S_{2p-1} ma dużą przemienną podgrupę A. Niech σ przesuwa cyklicznie liczby $1, 2, \dots, p$ i niech τ robi to samo z liczbami $p, p+1, \dots, 2p-1$.



Pośród permutacji $\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}$ są dwie: σ^i, σ^j takie, że $\sigma^i(\sigma^j)^{-1} \in A (p-1 > c_n)$. Istnieje zatem $0 < k < p$ takie, że $\sigma^k \in A$. Podobnie istnieje $0 < l < p$ takie, że $\tau^l \in A$. Ale

$$(\sigma^k \cdot \tau^l)(p) = p + l \neq p - k = (\tau^l \circ \sigma^k)(p),$$

czyli elementy σ^k, $\tau^l \in A$ nie są przemienne. Ta sprzeczność dowodzi, że grupa S_∞ nie mogła pojawić się na lekcji geometrii.

Rozwiązanie zadania F 227. Równanie ruchu obrotowego tłoka zapiszemy w postaci

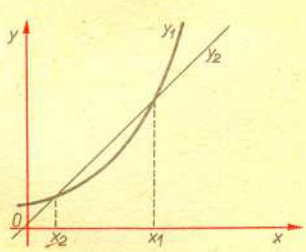
$$m\omega^2 x = (p_0 - p)\,S.$$

Warunek nieruchomości tłoka względem rurki ma postać

$$px = p_0 l,$$

gdzie p oznacza ciśnienie powietrza między tłokiem a zamkniętym końcem wirującej rurki, x jest końcowym położeniem tłoka. Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe na x

$$\frac{m\omega^2}{p_0 S}x^2 - x + l = 0,$$



którego pierwiastki są równe odpowiednio

$$x_{1,2} = \frac{p_0 S}{2m\omega^2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0 S}}\right).$$

Oczywiście musi być spełniony warunek $4m\omega^2 l/p_0 S < 1$, gdyż inaczej tłok wyleci z rurki. Aby stwierdzić, czy oba pierwiastki są rozwiązaniami, spójrzmy na rysunek, na którym przedstawiono wykresy funkcji $y_1 = \frac{m\omega^2}{p_0 S}x^2 + l$ i $y_2 = x$. Przecięcie tych wykresów daje dwa pierwiastki x_1 i x_2 równania kwadratowego. Łatwo zauważyć, że x_1 odpowiada niestabilnemu położeniu równowagi, a x_2 — stabilnemu. A więc końcowe położenie tłoka określone jest przez

$$x_2 = \frac{p_0 S}{2m\omega^2}\cdot\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0 S}}\right).$$