

Drogi Czytelniku, pomyśl sobie dowolną liczbę naturalną, pomnóż ją przez 87 i dodaj 134 i na koniec weź resztę z dzielenia przez 261. Z otrzymanym wynikiem powtórz wcześniejsze operacje, tzn. pomnóż go przez 87, dodaj 134 i weź resztę z dzielenia przez 261. Jeśli się nie pomyliłeś, w wyniku powinieneś dostać liczbę 47. Opisanie operacje arytmetyczne, wykonane dwukrotnie, przeprowadzają wszystkie liczby naturalne w liczbę 47. A oto wyjaśnienie tego zjawiska.

Oznaczając przez x_0 pomyślaną na początku liczbę, a przez x_1 rezultat pierwszej operacji, wykonane działania można zapisać w następujący sposób:

$$(87x_0 + 134) \bmod 261 = x_1,$$

$$(87x_1 + 134) \bmod 261 = 47.$$

Powyższe działania są szczególnym przypadkiem następującego procesu iteracyjnego:

$$(1) \quad x_{n+1} = (Ax_n + B) \bmod C,$$

gdzie A i B są liczbami naturalnymi mniejszymi od C . Dla zadanego x_0 powyższe iteracje generują ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, którego elementami są liczby naturalne ze zbioru $\{0, 1, \dots, C-1\}$. Wprowadzając funkcję

$$(2) \quad f(x) = (Ax + B) \bmod C$$

możemy równanie (1) przepisać w postaci $x_{n+1} = f(x_n)$. Funkcja $f(x)$, określona dla liczb naturalnych wzorem (2), może być rozszerzona na całą oś rzeczywistą za pomocą wzoru

$$f(x) = Ax + B - C \lfloor (Ax + B)/C \rfloor,$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x . Wykres tej funkcji składa się z odcinków linii prostych nachylonych pod kątem, którego tangens wynosi A (rys. 1). Jak łatwo zauważyć, okres tej funkcji jest równy $T = C/A$.

Teraz n -ty element x_n możemy wyrazić przez element x_0 jako wynik następującej superpozycji

$$(4) \quad x_n = f \circ f \circ \dots \circ f(x_0) = f^n(x_0).$$

Posługując się indukcją matematyczną i korzystając z oczywistej relacji

$$(a + kc) \bmod c = a \bmod c, \quad k \in \mathbb{N},$$

można wyrazić n -krotne złożenie funkcji f za pomocą wzoru

$$(5) \quad x_n = f^n(x_0) = \left(A^n x_0 + \frac{A^n - 1}{A - 1} B \right) \bmod C.$$

Gdy A jest większe od 1, wtedy wykres kolejnych superpozycji funkcji f będzie się składać z coraz bardziej stromych odcinków (rys. 2). Okres n -tej superpozycji f^n jest równy

$$(6) \quad T^{(n)} = C/A^n,$$

czyli $f^n(x + T^{(n)}) = f^n(x)$.

Gdy n rośnie, okresy funkcji f^n maleją. Gdy dla pewnego N zdarzy się, że odcinek jednostkowy będzie zawierał całkowitą wielokrotność odcinków długości $T^{(N)}$:

$$(7) \quad 1 = KT^{(N)} = KC/A^N, \quad K \in \mathbb{N},$$

wówczas $f^N(x+1) = f^N(x)$.

W szczególności, N -ta superpozycja funkcji f będzie przyjmować tę samą wartość dla wszystkich liczb naturalnych:

$$f^N(x)|_{\mathbb{N}} = x^* = \text{const.}$$

Warunek (7) oznacza, że istnieje taka liczba N , że N -ta potęga liczby A dzieli się bez reszty przez C :

$$(8) \quad A^N \equiv 0 \pmod{C}.$$

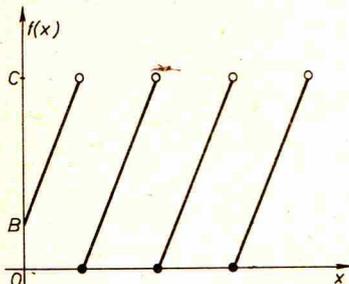
Ponieważ kolejne złożenie z funkcją f nie zmieni już wartości x^* (bo okres kolejnego złożenia funkcji f zmniejszy się A razy i odcinek jednostkowy będzie zawierał A razy więcej odcinków o długości C/A^{n+1}), więc liczba x^* jest punktem stałym odwzorowania f

$$f(x^*) = x^*.$$

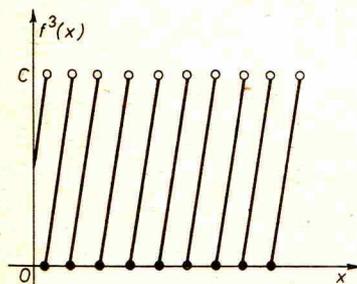
Wartość tego punktu stałego możemy otrzymać ze wzoru (5) podstawiając szczególną wartość $x_0 = 0$:

$$(9) \quad x^* = \left(\frac{A^n - 1}{A - 1} B \right) \bmod C.$$

Podsumowując: gdy znajdziemy liczby A , C i N będące rozwiązaniem równania (8), wówczas N -ta iteracja określona przez (1) dowolnego naturalnego elementu początkowego x_0 będzie równa liczbie x^* danej przez równanie (9). W przykładzie podanym na początku mieliśmy $A = 87 = 3 \cdot 29$, $C = 261 = 3^2 \cdot 29$, tak więc równanie (8) jest spełnione dla $N = 2$, a z (9) otrzymujemy wtedy $x^* = ((87+1) \cdot 134) \bmod 261 = (11792) \bmod 261 = 47$. Oczywiście Czytelnik może znaleźć wiele innych rozwiązań równania (8), bardziej „złośliwych”, tzn. wymagających wykonania większej liczby iteracji równania (1) (np. dla $A = 94$, $C = 6016$ ilość iteracji N jest równa 7).



Rys. 1



Rys. 2



Rozwiązanie zadania F 236. Różnica czasu przechodzenia światła w obu rurach jest równa

$$\Delta t = l/v_1 - l/v_2,$$

gdzie $v_{1,2}$ — prędkości fazowe światła w wodzie o różnych kierunkach przepływu. Jeśli zaniedbamy efekt Dopplera, to wówczas:

$$v_{1,2} = \frac{c}{n} \pm u \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

a w konsekwencji

$$\Delta t = \frac{l}{\frac{c}{n} - u \cdot (1 - 1/n^2)} - \frac{l}{\frac{c}{n} + u \cdot (1 - 1/n^2)} \approx \frac{2lu}{c^2} (n^2 - 1).$$

Przesunięcie wyrażone przez odległość między prążkami jest równe

$$\Delta p = \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2c\Delta t}{\lambda_0} = \frac{4lu}{c\lambda_0} (n^2 - 1) = 0,64.$$