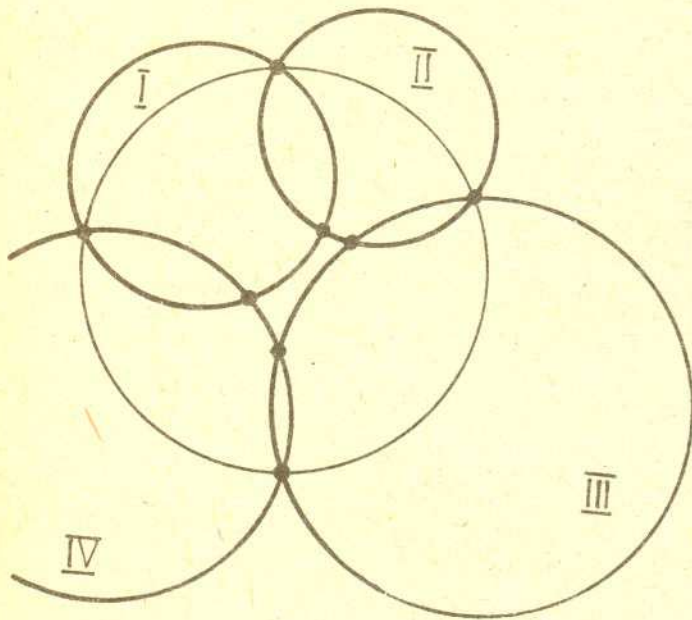


# 5 mata delta

## Sformułuj i udowodnij

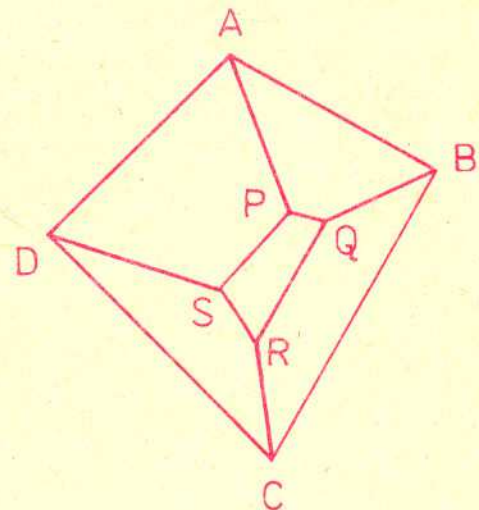
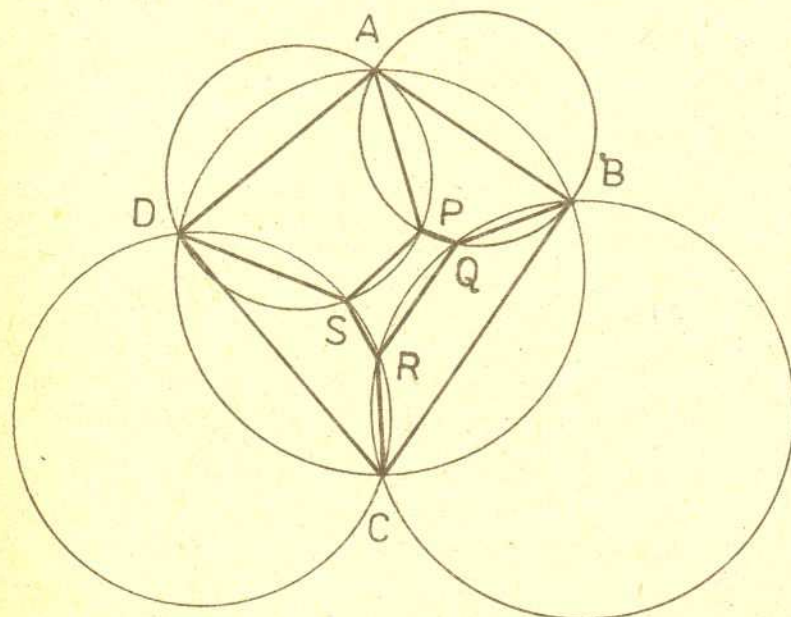


Zanim matematyk weźmie się do dowodu, musi mieć sformułowaną hipotezę – przypuszczenie, że jakieś zdanie jest twierdzeniem, czyli że jest prawdziwe. Często sformułowanie hipotezy jest zadaniem trudniejszym od samego dowodu.

Zaczyna się od tego, że trzeba coś zauważyć. Np. na rysunku obok mamy cztery grube okręgi i jeden cienki. Oznaczmy przez  $A, B, C, D$  punkty przecięcia okręgów I i II, II i III, III i IV oraz IV i I leżące na cienkim okręgu. Można podejrzewać, że pozostałe punkty przecięć tych okręgów ( $P, Q, R, S$ ) też leżą na jakimś okręgu.

Spróbujmy to udowodnić. Dla jasności przerysujmy te punkty już bez okręgów i połączmy je jak na rysunku poniżej. Skorzystamy z twierdzenia:

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego przeciwległych kątów jest równa  $180^\circ$ .



Skoro tak, to

$$\begin{aligned} \angle PAD &= 180^\circ - \angle PSD, \text{ bo } APSD \text{ jest wpisany w I,} \\ \angle RCD &= 180^\circ - \angle RSD, \text{ bo } CRSD \text{ jest wpisany w IV,} \end{aligned}$$

a więc

$$\angle PSR = 360^\circ - (\angle PSD + \angle RSD) = \angle PAD + \angle RCD.$$

Korzystając z okręgu II i III podobnie otrzymujemy

$$\angle PQR = 360^\circ - (\angle PQB + \angle RQB) = (180^\circ - \angle PQB) + (180^\circ - \angle RQB) = \angle PAB + \angle RCB.$$

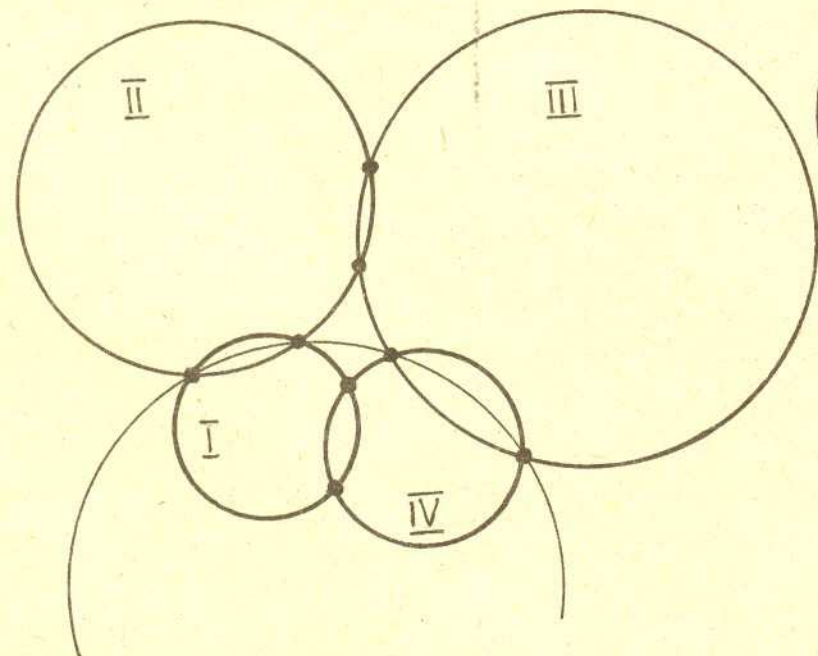
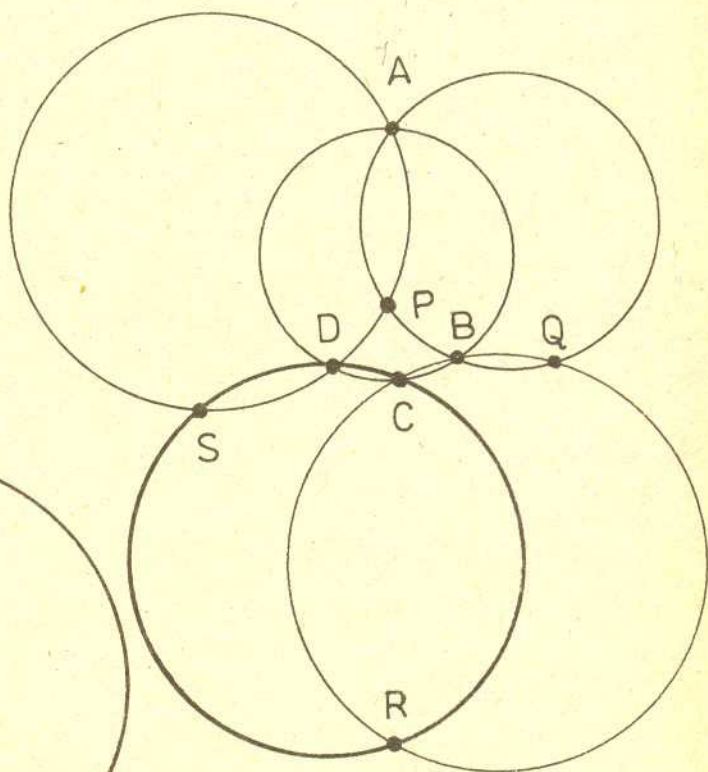
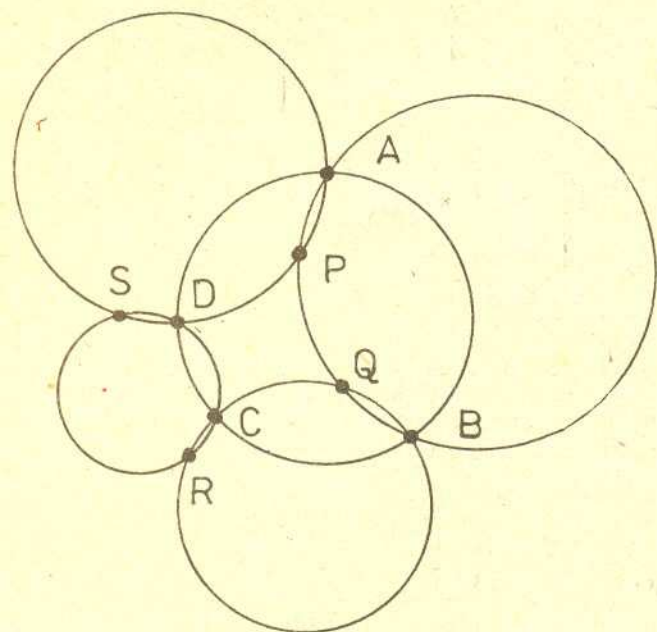
Łącznie mamy

$$\begin{aligned} \angle PSR + \angle PQR &= \angle PAD + \angle RCD + \angle PAB + \angle RCB = \\ &= (\angle PAD + \angle PAB) + (\angle RCD + \angle RCB) = \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ, \end{aligned}$$

bo  $ABCD$  jest wpisany w tenki okrąg. Udało się: na  $PQRS$  można opisać okrąg. Stąd

Hipoteza: Jeżeli okręgi I i II, II i III, III i IV oraz IV i I przecinają się w dwóch punktach i cztery z tych ośmiu punktów – po jednym z każdej pary – leżą na jakimś okręgu, to pozostałe z tych punktów też leżą na okręgu.

A dlaczego to ma być hipoteza, a nie już twierdzenie? Przecież przeprowadziliśmy dowód. Na to odpowiadają kolejne dwa rysunki. Widać z nich, że dowiedliśmy tylko jednego z przypadków. Proszę spróbować dowieść pozostałych (czy jest ich tylko dwa?).



A na zakończenie propozycja sformułowania hipotezy i przeprowadzenia jej dowodu dla sytuacji przedstawionej na rysunku obok.