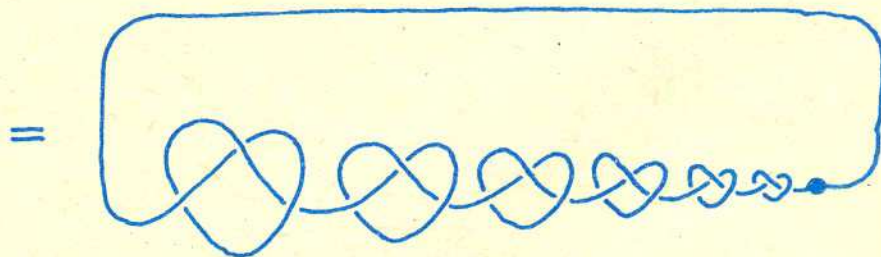
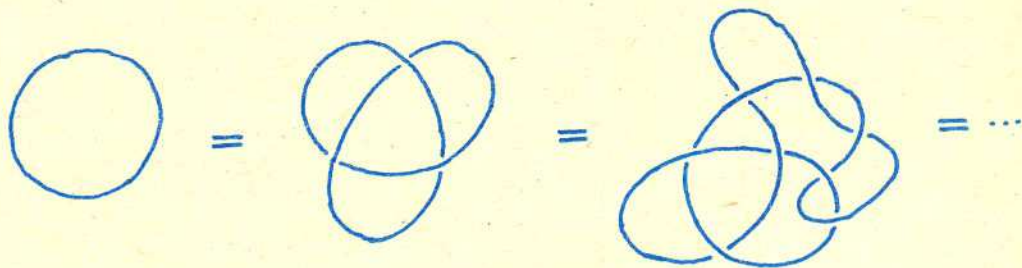
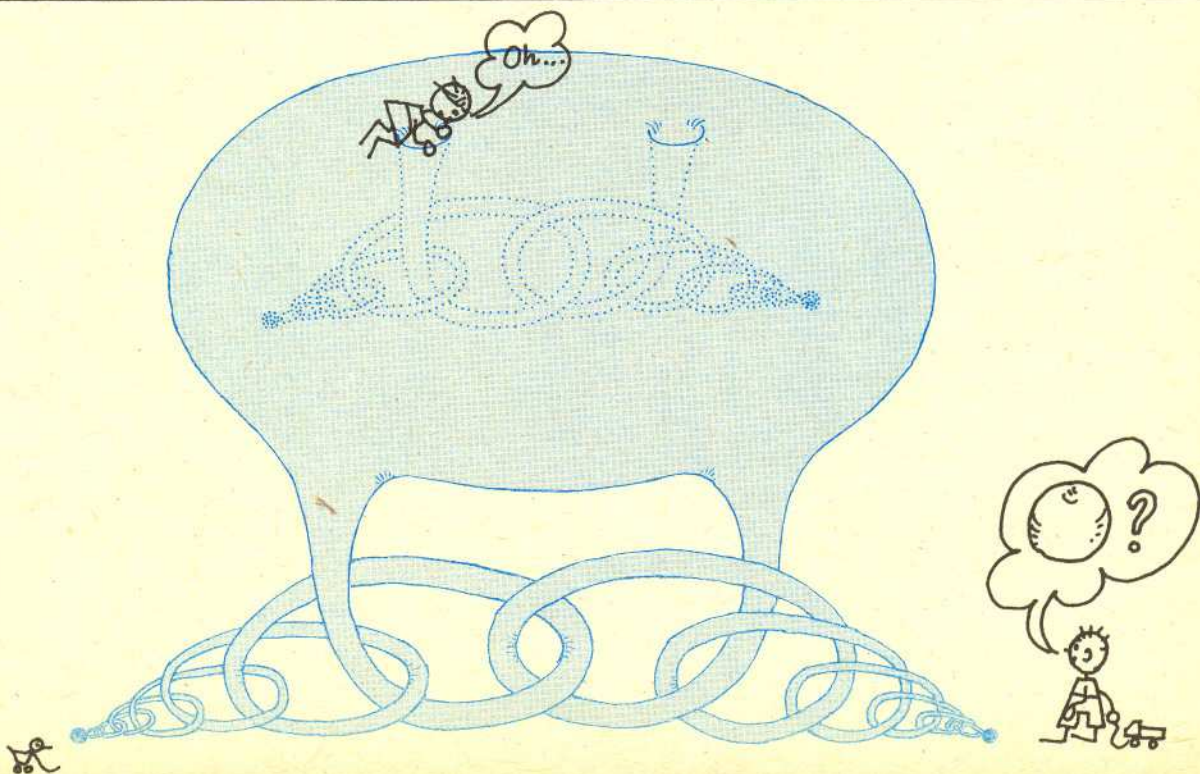
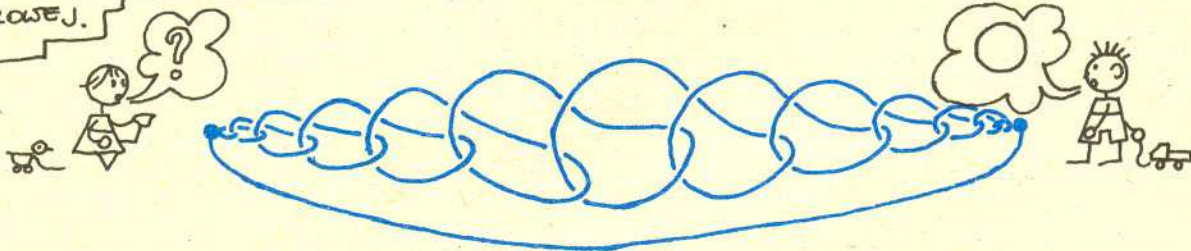


# POŁOŻENIE ROZMAIT



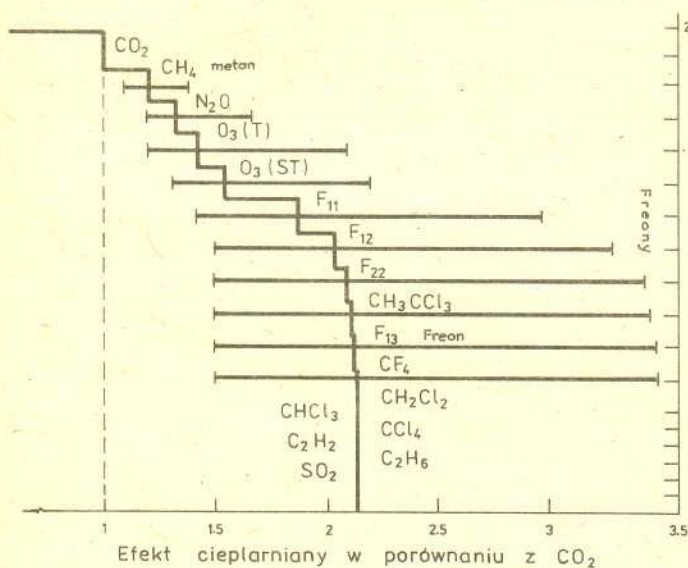
TE OKRĘGI SĄ  
RÓŻNIE POŁOŻONE  
W PRZESTRZENI  
3-WYMIAROWEJ.





Dr hab. Jan KALINOWSKI

Działalność człowieka ma coraz większy wpływ na przyrodę. Ocenia się, że do biosfery dostają się olbrzymie ilości metali ciężkich (dane w tysiącach ton na rok): As - 120, Cd - 30, Cu - 2150, Hg - 11, Mo - 110, Ni - 470, Pb - 1160, Sb - 72, Se - 79, V - 71, Zn - 2340. Całkowita toksyczność tych metali jest większa niż całkowita toksyczność wszystkich odpadów organicznych i radioaktywnych produkowanych rocznie, biorąc za wskaźnik ilość wody potrzebnej do ich rozcieńczenia, aby osiągnąć standard wody pitnej. Olbrzymi wzrost zawartości metali toksycznych w powietrzu, wodzie i glebie i przenikanie ich do pożywienia niesie ze sobą trudne do oceny zagrożenie zdrowia naszego i przyszłych generacji.



Nie tylko nad Antarktydą, ale również w atmosferze arktycznej zaobserwowano zanik ozonu w okresie marca - kwietnia każdego roku. Sądzi się, że jest to wynik produkcji bromoformu przez glony (np. *Ascophyllum nodosum*) w ilości około  $10^4$  ton/rok. Tyle samo bromoformu produkuje przemysł.

Metan, podobnie jak  $\text{CO}_2$ , odgrywa dużą rolę w tzw. efekcie cieplarnianym. Wzrost ich zawartości w atmosferze (o 150 % dla metanu i 23 % dla  $\text{CO}_2$  od 1800 r.) oraz innych gazów wpływających na bilans energetyczny promieniowania ciepłego przyczynił się zapewne do wzrostu średniej temperatury o  $0,5^\circ\text{C}$  od 1860 r. Prawdopodobnie dalszy wzrost koncentracji tych gazów spowoduje wzrost temperatury o  $1,5^\circ\text{C}$  w ciągu najbliższych 40 lat, o ile inne mechanizmy obniżające wzrost temperatury (np. chmury) nie będą efektywniejsze. Załączona ilustracja pokazuje wpływ różnych gazów (w porównaniu z  $\text{CO}_2$ ) na efekt cieplarniany.

Modele klimatu ziemskiego przewidują szybsze ogrzewanie tundry kanadyjskiej i syberyjskiej niż reszty globu ziemskiego. Stopienie wiecznej zmarzliny może spowodować uwolnienie olbrzymiej ilości metanu w niej zamrożonego. Metan jest bardzo istotny dla efektu cieplarnianego, a zmarzlina - olbrzymią pułapką metanu wytwarzanego przez organizmy torfowisk i bagien tundry. Uwolnienie metanu może przyspieszyć globalne ocieplenie.

W spekulacjach na temat efektu cieplarnianego nie jest do końca wyjaśniona rola chmur. Chmury pokrywają około połowy Ziemi. Ich efekt jest dwójaki. Z jednej strony odbijają promieniowanie słoneczne, z drugiej - utrudniają emisję energii cieplejszych warstw powietrza i ziemi pod nimi. Wstępne pomiary przeprowadzone przez dwa satelity ERBE (Earth Radiation Budget Experiment) wskazują, że istotniejsze jest odbijanie energii słonecznej. W kwietniu 1985 r. chmury zredukowały przychodzące promieniowanie słoneczne ( $1340 \text{ W/m}^2$ ) o  $44,5 \text{ W/m}^2$  redukując emisję energii cieplej Ziemi o  $31,3 \text{ W/m}^2$ . Daje to netto zmniejszenie ogrzewania Ziemi o  $13,2 \text{ W/m}^2$ . Dla kontrastu - obecne modele matematyczne zmian klimatu przewidują, że podwojenie zawartości  $\text{CO}_2$  spowoduje podwyższenie temperatury o  $2,8^\circ\text{C}$  do  $5,2^\circ\text{C}$ , a więc wzrost promieniowania ciepłego Ziemi o  $4 \text{ W/m}^2$ .

Dymy wywołane pożarami mogą mieć istotny wpływ na klimat. Ich znaczenie dla klimatu jest dyskutowane w kontekście tzw. zimy jądrowej, mogącej powstać w wyniku wybuchu wojny jądrowej. O ich roli mogą świadczyć obserwacje przeprowadzone w 1987 r. w północnej Kalifornii. Na skutek olbrzymich pożarów lasów dymy spowiły niektóre doliny w górach na ponad 3 tygodnie. Średnia dzienna temperatura była tam niższa od normalnej o ponad  $15^\circ\text{C}$  przez pierwszy tydzień i o  $5^\circ\text{C}$  przez 3 tygodnie. Obniżenie temperatury powietrza przy powierzchni Ziemi spowodowało odwrócenie rozkładu temperatury w powietrzu, co przyczyniło się do utrzymania dymów. Zaszło więc typowe dodatnie sprzężenie zwrotne: koncentracja dymów  $\rightarrow$  niższa temperatura  $\rightarrow$  koncentracja dymów.



## Rozwiązanie zadania M 573.

Jeśli  $f$  lub  $g$  jest stały, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że żaden z nich nie jest stały. Mnożąc ewentualnie jeden lub dwa wielomiany przez  $-1$  możemy założyć, że dla pewnego  $x_0$  oba wielomiany są rosnące na zbiorze  $\{x : x > x_0\}$ . Istnieje takie  $y_1 > x_0$ , że  $f(y_1) = a \in \mathbb{Z}$  i  $g(y_1) = b \in \mathbb{Z}$ . Niech teraz  $y_2$  będzie najmniejszą liczbą, większą od  $y_1$  taką, że  $f(y_2) \in \mathbb{Z}$ . Wówczas  $f(y_2) = a + 1$  oraz  $g(y_2) = b + 1$ . Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy np.  $f(y_2) > a + 1$  i z twierdzenia Darboux (funkcja ciąga przyjmuje wartości pośrednie) otrzymalibyśmy istnienie takiego  $x$ , że  $y_1 < x < y_2$  oraz  $f(x) = a + 1$ , co przeczy wyborowi  $y_2$ . W ten sposób możemy znaleźć dowolnie długi ciąg punktów  $y_1, y_2, \dots, y_k$  taki, że  $f(y_i) = a + i - 1$ ,  $g(y_i) = b + i - 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Stąd wielomian  $f - g$  jest stały na dowolnie liczonym zbiorze, więc w ogóle jest stały.



# NOWE ROZMAITOŚCI ZE STARYMI

KALENDARZ MAJSTERKONCZA 1990

# 15

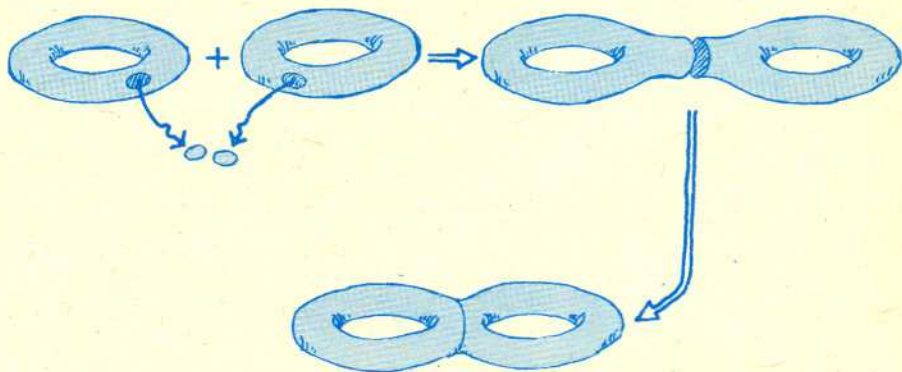
STYCZEŃ

Poniedziałek

Arnolda  
Domostawa  
Izydora  
Makarego  
Pawła

SUMA SPÓJNA

WEŹ Dwie ROZMAITOŚCI, W KAŻ-  
DEJ WYTNIJ DZIURKĘ I ZLEP  
JE BRZEGAMI.



KALENDARZ MAJSTERKONCZA 1990

# 16

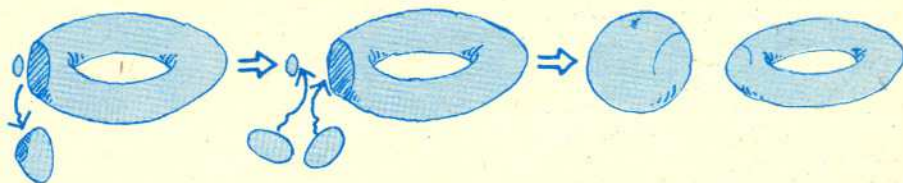
STYCZEŃ

Wtorek

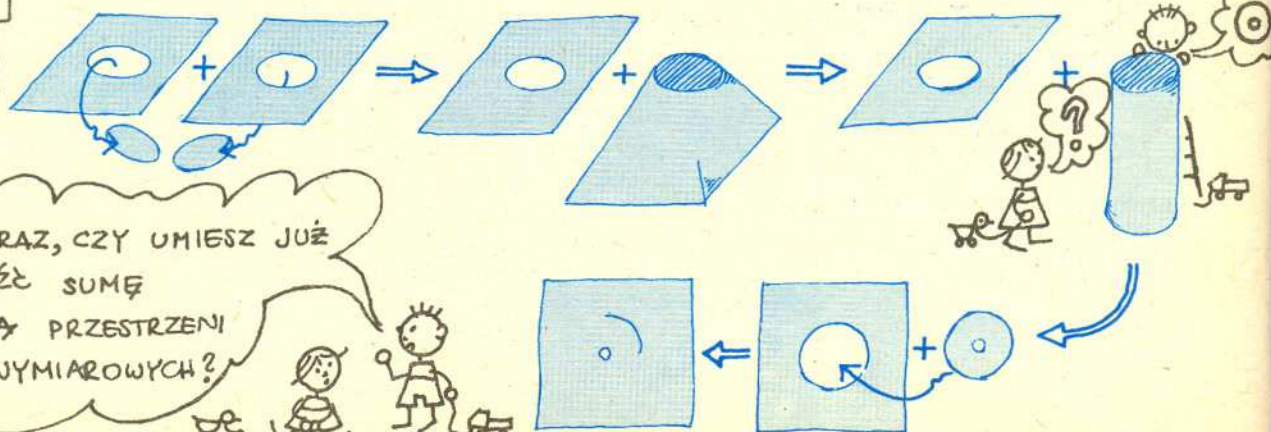
Marcelego  
Waldemara  
Włodzimierza

CHIRURGIA

WEŹ ROZMAITOŚĆ. ZANURZ W  
NIEJ UTAŁBC, PO CZYM GO WYT-  
NIJ. POWSTAŁE DZIURY ZALEP  
ZA POMOCĄ DWÓCH DYSKÓW.



SUMA SPÓJNA  
DWÓCH  
PŁASZCZYZN



A TERAZ, CZY UMIESZ JUŻ  
ZNALEŹĆ SUMĘ  
SPÓJNĄ PRZESTRZENI  
3-WYMIAROWYCH?



## KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*

Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.

Dzisiejsza propozycja doświadczenia dotyczy problemu bardzo ważnego dla taterników:

## Badanie tarcia liny o pręt

Potrzebne materiały:

1. Pręt, np. ołówek, kij od szczotki, pręt metalowy (gładki).
2. Mocna nitka, cienki sznurek lub żyłka wędkarska.
3. Wiele ciężarków – identycznych przedmiotów, które dadzą się zawiesić na nitce, np. nakrętki, żabki do firan, spinacze biurowe.

Przygotowanie: Na jednym końcu nitki zawieszamy jeden ciężarek. Zamocowujemy pręt poziomo tak, aby się nie ruszał i owijamy dookoła niego obciążoną nitkę, a następnie obciążamy jej drugi koniec ciężarkami.

Pomiar: Ile potrzeba ciężarków, aby potrafiły wciągnąć do góry jeden ciężarek zawieszony na drugim końcu nitki? Pomiar wykonać dla różnej liczby zwojów nitki.

Wyniki przedstawić w formie tabeli oraz wykresu. Dokładnie opisać wykonane doświadczenie.

Analiza (o wiele trudniejsza niż doświadczenie; jeśli nie potrafisz, to się nie martw).

1. Wyraź słowami, co otrzymałeś. Czy wynik jest zaskakujący?
2. Zaproponuj wzór empiryczny opisujący otrzymaną zależność liczby ciężarków uruchamiających nitkę od liczby zwojów. Może tu pomóc znalezienie takich skal na osiach, aby punkty na wykresie układały się w prostą.
3. Spróbuj przewidzieć wyniki doświadczenia, znając współczynnik tarcia nitki o pręt (znajdź teoretyczny wzór opisujący badaną zależność).

Uwagi

1. Masa nitki powinna być zanedbywalnie mała w porównaniu z masą ciężarka (którą najwygodniej przyjąć za jednostkę).
2. Warto powtórzyć doświadczenie w różnych warunkach (używając różnych elementów).
3. Jakie czynniki wpływają na dokładność pomiaru?
4. Jeżeli dysponujesz wagą, zaproponuj i wykonaj inny wariant doświadczenia.

Wzór empiryczny jest to wzór opisujący zależność obserwowaną w doświadczeniu bez zrozumienia przyczyn, dla których zależność ta jest taka, a nie inna. Jest to po prostu wzór odgadnięty.

*Redaguje doc. dr. Jan GAJ*

Listy prosimy przysłać pod adresem:  
Korespondencyjny Klub Fizyków  
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego  
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



## Zadania

*Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI*

**M 571.** Na okręgu napisano  $n \geq 5$  liczb tak, że suma każdych trzech kolejnych jest nie większa niż 3 oraz suma każdych pięciu kolejnych liczb jest nie większa niż 5. Wykazać, że suma wszystkich liczb przyjmuje wartość maksymalną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie są równe 1.

Rozwiązanie na str. 7

**M 572.** Wielomiany  $f$  i  $g$  przyjmują wartości całkowite w tych samych punktach, tzn.  $f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow g(x) \in \mathbb{Z}$ . Wykazać, że  $f - g = \text{const}$  lub  $f + g = \text{const}$ .

Rozwiązanie na str. 3

**M 573.** Udowodnić, że w każdym czworoscianie istnieje taki wierzchołek, iż z krawędzi z niego wychodzących można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie na str. 7

*Redaguje dr Paweł KRAWCZYK*

**F 288.** Długą rurę o przekroju kwadratu o boku  $l = 10$  cm napełniono wodą do  $1/4$  jej objętości. Średnia gęstość rury z wodą wynosi  $\rho = 0,5 \text{ kg/dm}^3$ . Rurę następnie włożono do dużego zbiornika wodnego. Zaniedbując grubość ścianek znaleźć położenie równowagi tego układu.

Rozwiązanie na str. 1

**F 289.** Niemal każdy zabawiał się kiedyś próbując utrzymać w pozycji pionowej pręt oparty na czubku palca. Jest to stosunkowo proste, gdy pręt ma długość  $l$  rzędu 1 m. Balansowanie prętem dziesięciometrowej długości należy już do trudnych sztuk cyrkowych. Paradoksalnie, równie trudno jest utrzymać w pozycji pionowej np. długopis. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 17



# BORDYZM

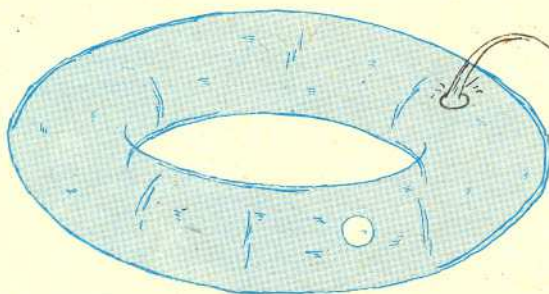
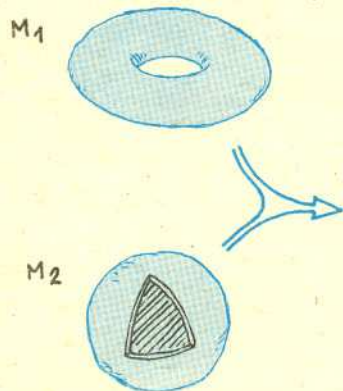
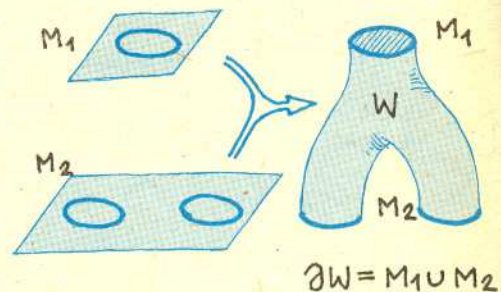
ROZMAIŁOŚCI  $M$ .



1 ICH BRZEGI  $\partial M$



DWIE ROZMAIŁOŚCI ZWARTE  $M_1, M_2$   
SĄ BORDYCZNE ( $\sim$ ),  
JEŚLI TWORZĄ RAZEM BRZEG  
TRZECIEJ ROZMAIŁOŚCI ZWARTEJ

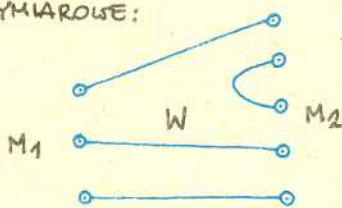


GDY NALEJĘ WODY  
DO PEKNA, TO UTWORZY  
ONA ROZMAIŁOŚĆ  
3-WYMIAROWĄ, KTÓREJ  
BRZEGIEM BĘDZIE  
 $M_1 \cup M_2$

DWIE ROZMAIŁOŚCI 0-WYMIAROWE:

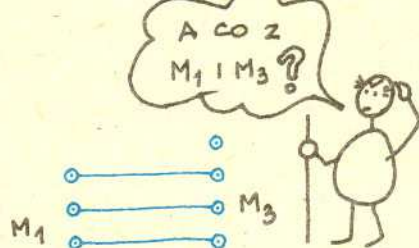
$$M_1 = \{0, 0, 0\} \quad |$$

$$M_2 = \{0, 0, 0, 0, 0\}$$



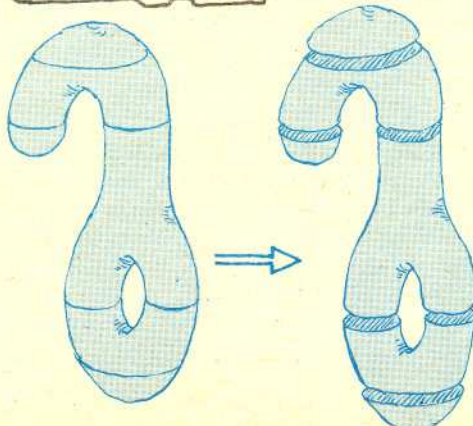
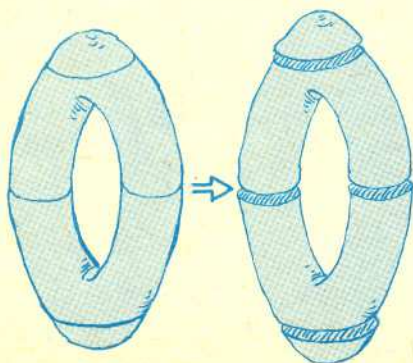
SĄ BORDYCZNE.

$$M_1 \cup M_2 = \partial W$$

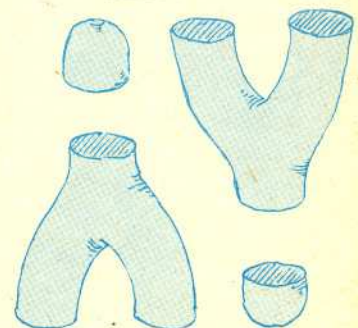


EUREKA!  
KAŻDY KIJ  
MA 2 KOŃCE

BORDYZMY SĄ BARDZO UŻYTECZNE, BO POZWALAJĄ  
Z GRUBSZA KLASYFIKOWAĆ ROZMAIŁOŚCI.  
TEORIA MORSE'A POZWALA POCIAĆ KAŻDĄ ROZMAIŁOŚĆ  
NA PROSTE KLOCKI.



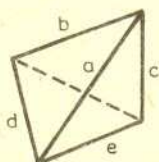
PROSTE KLOCKI...



..., Z KTÓRYCH ZBUDOWANE  
SĄ WSZYSTKIE ORIENTOWALNE  
SZCZEGÓLNE 2-WYMIAROWE



**Rozwiązanie zadania M 578.**  
Przypuśćmy przeciwnie.



Niech  $a$  będzie najdłuższą krawędzią czworokąta. Wtedy  $a + b > c$ ,  $a + c > b$ , więc  $a \geq b + c$  (bo z założenia z odcinków  $a, b, c$  nie można zbudować trójkąta). Analogicznie  $a > d + e$ . Dodając stronami otrzymujemy  $2a \geq (d + b) + (e + c)$ , a stąd  $a \geq d + b$  albo  $a \geq e + c$ , co w obu przypadkach daje sprzeczność.

Podczas całkowitego zaćmienia Słońca staje się na krótko widoczna jego rzadka atmosfera – korona – na co dzień niedostrzegalna w oślepiającym blasku tarczy słonecznej. Jednak zaćmienia nie są na zawołanie, a wyprawa do miejsca, skąd będą widoczne, jest z reguły daleka i kosztowna. I tak potrzeba zrodziła wynalazek, koronograf (Bernard Lyot, 1930). W przyrządzie tym w ognisku obiektywu umieszcza się przesłonę, krążek o rozmiarach obrazu tarczy Słońca. Taki „sztuczny Księżyc” daje w efekcie sztuczne zaćmienie Słońca i dlatego za jego pomocą koronę słoneczną można obserwować w dowolnej porze dnia dowolnie długo.

Korzyść płynąca z wyeliminowania potężnego strumienia światła tarczy słonecznej dla każdego jest tu chyba widoczna. Mniej oczywiste jest, że podobną technikę stosuje się w przypadkach, gdzie w ogóle światła jest bardzo mało. Pisaliśmy już (artykuł M. Subotowicza, *Delta* 3/1989) o zaobserwowaniu pierścieni pyłowych wokół gwiazd (pierścienie te są prawdopodobnie prekursorami przyszłych układów planetarnych). Obraz gwiazdy przesłonięty małym krążkiem umożliwił „zobaczenie” w podczerwieni słabej poświaty owego pierścienia wokółgwiazdowego.

Ale metodę tę zastosowano też do obserwacji obiektów jeszcze słabszych, mianowicie kwazarów. Wszystko wskazuje na to, że kwazar to galaktyka z wyjątkowo jasnym jądrem, gdzie energia pochodzi z intensywnej akrecji materii na masywną czarną dziurę. Cały kwazar wskutek oddalenia jest zawsze obiektem bardzo słabym, ale jego jądro jest oślepiająco jasne w porównaniu z resztą galaktyki. Pomiar jasności kwazarów z użyciem różnych przesłon prowadził już kilka lat temu np. Gerry Neugebauer z zespołem – użyto 5-metrowego teleskopu palomarskiego. Obserwacje te również wykonywane były w podczerwieni. W tym przypadku chodziło już nawet nie o uzyskanie obrazów, lecz o zmierzenie, jaki wkład do jasności kwazara ma jego otoczek. W ten sposób uzyskano niezależny argument za tym, że kwazary istotnie mogą być galaktykami, aczkolwiek nie dało to żadnej informacji o strukturze (typie) galaktyki.

dr Tomasz KWAST

**Rozwiązanie zadania M 571.**  
Oznaczmy sumę wszystkich liczb przez  $S$ . Dodajmy wszystkie sumy trzech kolejnych liczb. Otrzymamy  $3S$ , bo każda liczba wchodziła w skład trzech trójek kolejnych liczb. Z drugiej strony dodaliśmy  $n$  składników nie większych od 3. Stąd  $3S \leq 3n$  i jeśli  $S = n$ , to suma każdych trzech kolejnych liczb jest równa 3. Analogicznie, jeżeli  $S = n$ , to suma każdych pięciu kolejnych liczb jest równa 5. Wówczas suma każdych dwu kolejnych liczb jest równa 2 (bo suma dwu kolejnych liczb jest równa różnicy sum pewnych pięciu liczb i pewnych trzech kolejnych liczb). Ale skoro suma każdych trzech kolejnych liczb jest równa 3, a każdych dwu kolejnych 2, to każda liczba jest równa 1.

**Elementarny dowód nierówności Erdösa–Mordella**

Poniższy problem postawił Paul Erdős w 1935 roku (*American Mathematical Monthly, Problem 3740*): Jeżeli  $O$  jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta  $ABC$  i  $P, Q, R$  są spodkami prostopadłych opuszczonych z punktu  $O$  odpowiednio na boki  $BC, CA, AB$ , to

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

W dwa lata później pojawiło się jego uzasadnienie (L.J. Mordell). Obecnie znamy różne dowody tego faktu (patrz np. Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом, „Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум”, зад. 111(6) lub *Delta* 11/1988).

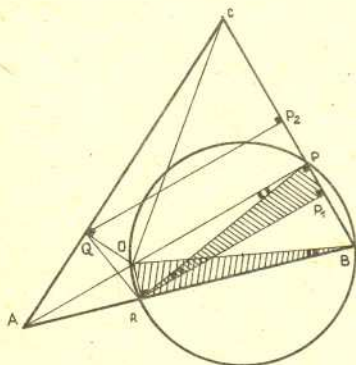
Oto dowód L. Bankoffa z 1958 roku metodą geometrii elementarnej (bez użycia trygonometrii).

Niech  $P_1$  i  $P_2$  będą spodkami prostopadłych opuszczonych z punktów  $R$  i  $Q$  na bok  $BC$ . Analogicznie definiujemy punkty  $Q_1$  i  $Q_2$  oraz  $R_1$  i  $R_2$  na pozostałych bokach. Ponieważ trójkąty  $PRP_1$  i  $ORR_1$  są podobne (rys.), więc  $P_1P = \frac{PR \cdot OR}{OB}$ . Analogicznie  $PP_2 = \frac{PQ \cdot OQ}{OC}$ ,  $Q_1Q = \frac{PQ \cdot OP}{OC}$ ,  $Q_2Q = \frac{RQ \cdot OR}{OA}$ ,  $R_1R = \frac{RQ \cdot OQ}{OA}$ ,  $RR_2 = \frac{RP \cdot OP}{OB}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} OA + OB + OC &\geq \\ &\geq OA \left( \frac{P_1P + PP_2}{RQ} \right) + OB \left( \frac{Q_1Q + QQ_2}{RP} \right) + OC \left( \frac{R_1R + RR_2}{PQ} \right) = \\ &= OP \left( \frac{RP \cdot OC}{PQ \cdot OB} + \frac{PQ \cdot OB}{RP \cdot OC} \right) + OQ \left( \frac{PQ \cdot OA}{RQ \cdot OC} + \frac{RQ \cdot OC}{PQ \cdot OA} \right) + \\ &+ OR \left( \frac{RP \cdot OA}{RQ \cdot OB} + \frac{RQ \cdot OB}{RP \cdot OA} \right) \geq 2(OP + OQ + OR), \end{aligned}$$

gdyż dla dowolnych dodatnich liczb  $p$  i  $q$ ,  $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$ .

Jarosław GÓRNICKI





POWIERZCHNIE DW

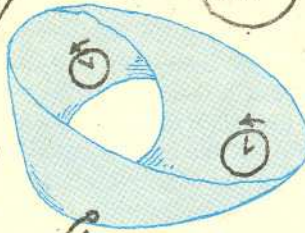
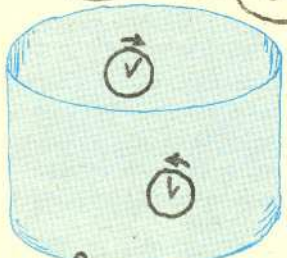
CISZA!

MATEMATYK BADA

U MOJEGO SĄSIADA  
ZEGARY CHODZĄ  
JAK CHCĄ.

STRACIŁEM ORIENTACJĘ  
?!  
?!

PANIE PROFESORZE,  
OKAZAŁO SIĘ, ŻE  
WALEC I WSTĘGA MÖBIUSA  
SĄ RÓŻNE: WALEC  
JEST POWIERZCHNIĄ  
ORIENTOWALNĄ,  
A WSTĘGA NIE.



WALEC

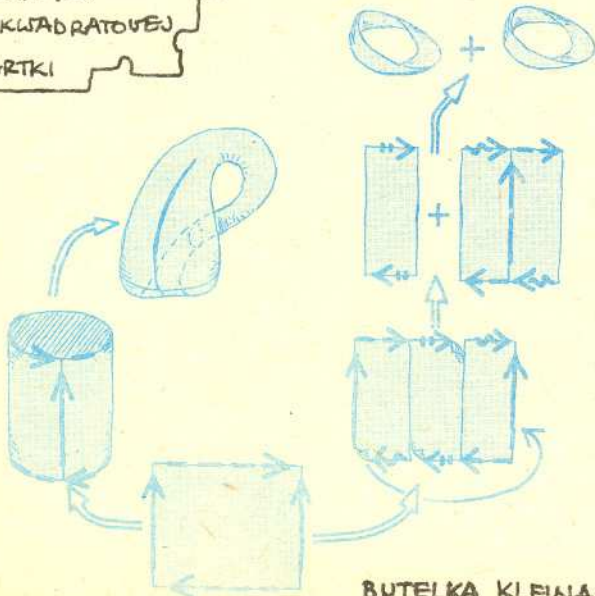
WSTĘGA MÖBIUSA US. PAT. NO 2784834

POWIERZCHNIE ZWARTYCH

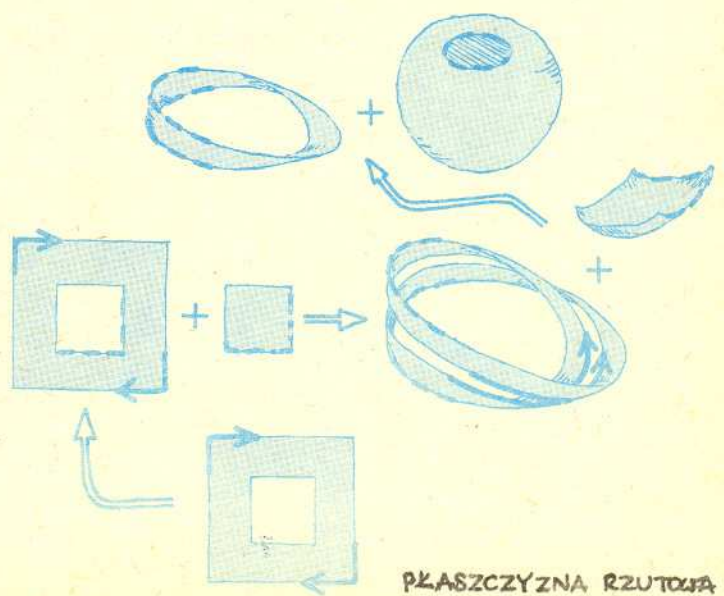


A TAK SOBIE  
MOŻESZ SKLEIĆ  
MODELE POWIERZCHNI  
ZWARTYCH  
Z KWADRATOWEJ  
KARTKI

EFERY Z DZURKAMI ZALEPIONYMI WSTĘGAMI MÖBIUSA



BUTELKA KLEINA



PLASZCZYZNA RZUTOWA

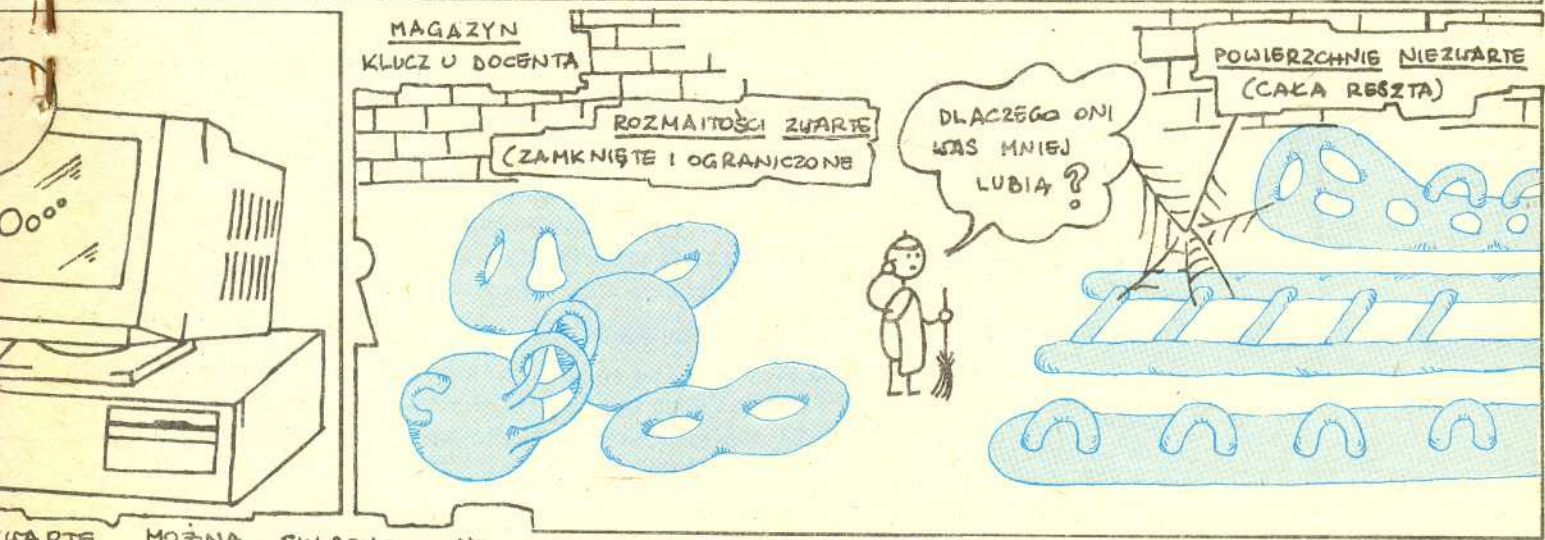


# WYMIAROWOŚĆ

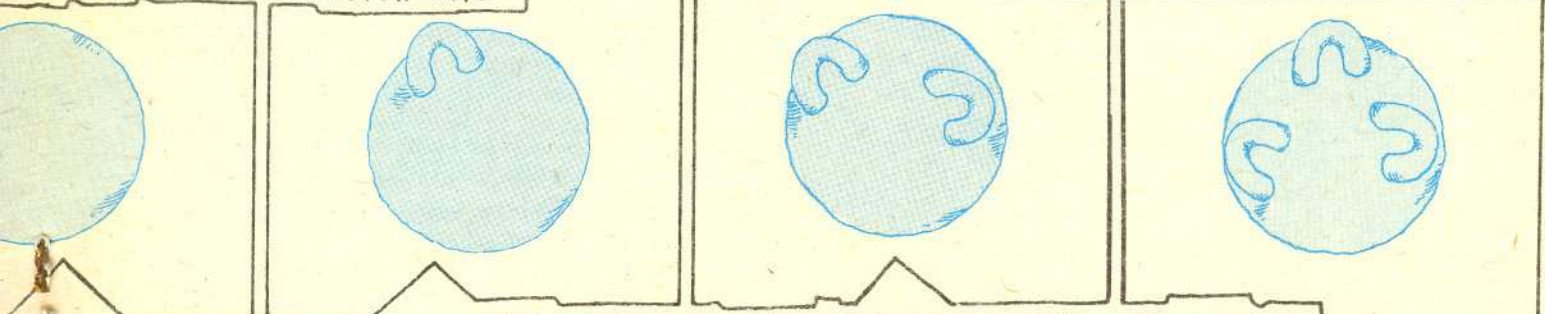
alias

rys. Krzysztof BIESAGA

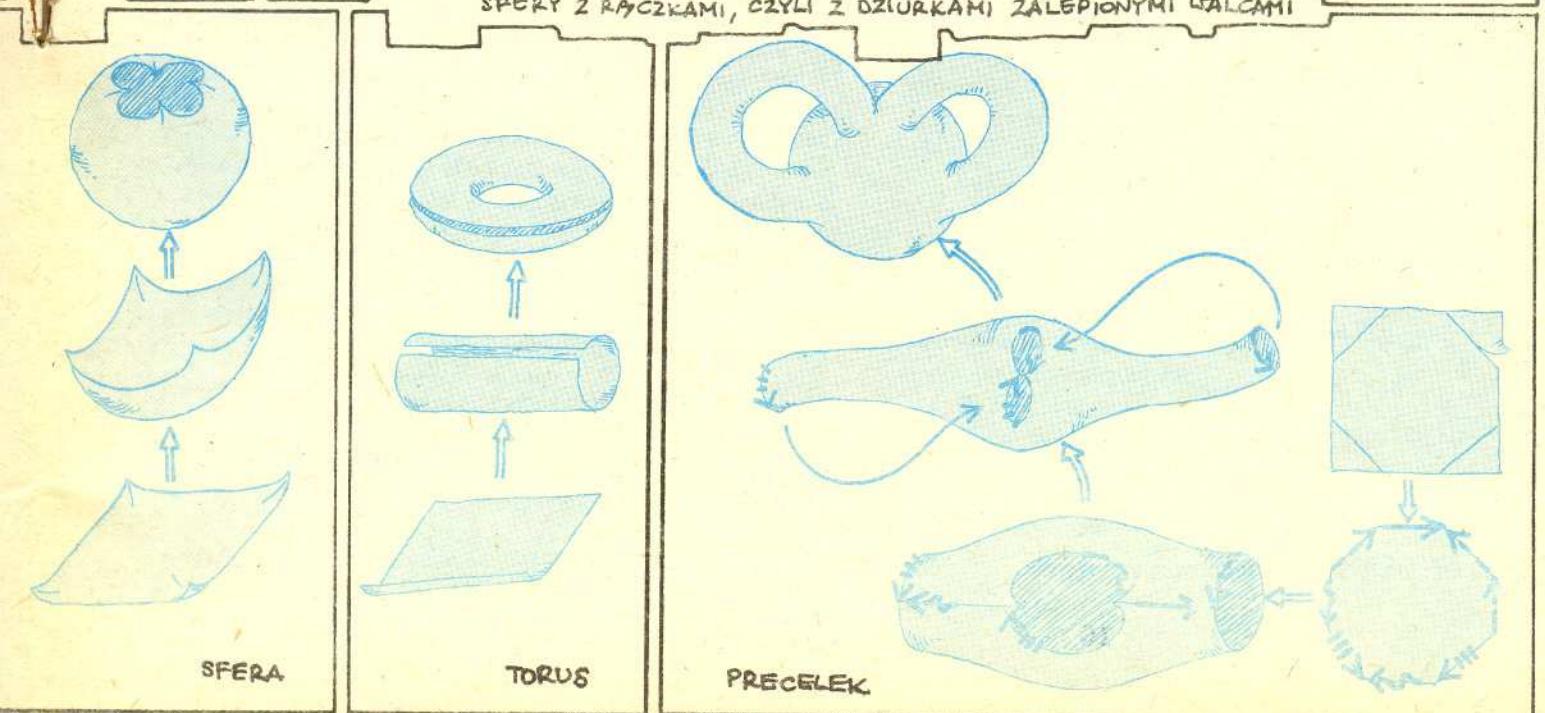
## DWUWYMIAROWE



ZWARTE MOŻNA SKLASYFIKOWAĆ



SPERY Z RĄCZKAMI, CZYLI Z DZIURKAMI ZAŁEPIONYMI WALCAMI







# Mała delta

## Odbłyśnik

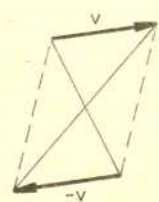
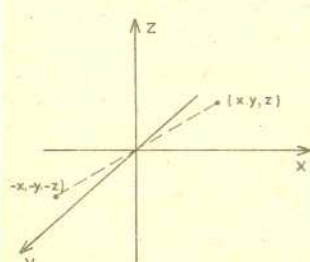
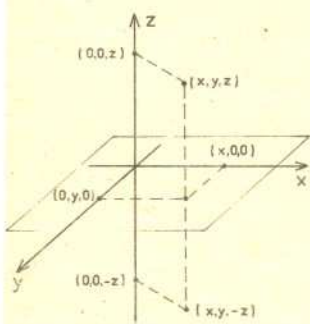
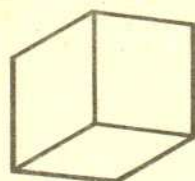
Jak z lusterek zbudować odbłyśnik, czyli takie urządzenie, które każdy padający na nie promień światła odeśle z powrotem?

Pierwsza, prawdziwa zresztą, odpowiedź brzmi – nie da się. Zamiast ją uzasadniać, spróbujmy zastanowić się nad układem lusterek, który ma tę własność, że każdy odbity przez ten układ promień będzie równoległy do promienia padającego. Jest to „prawie idealny odbłyśnik”, bo gdy układ jest mały, promień odbity jest przez całą swą drogę bardzo bliski promieniowi padającemu.

Konstrukcja „prawie idealnego odbłyśnika” (PIO) może być taka: zestawiamy trzy lusterka w ten sposób, by każde dwa z nich były prostopadłe.

Dlaczego taki układ jest PIO? Dlatego, że złożenie trzech symetrii płaszczyznowych jest symetrią środkową. Uzasadnić to można np. za pomocą układu współrzędnych związanych z lusterkami – osiami układu niech będą krawędzie styku lusterek.

Odbicie w każdej z płaszczyzn układu (w każdym lusterku) zmienia znak jednej ze współrzędnych, pozostawiając dwie pozostałe bez zmian. Zatem trzy odbicia (niezależnie od tego, w jakiej kolejności je wykonamy) przeprowadzą dowolny punkt na punkt położony symetrycznie względem początku układu współrzędnych (czyli rogu naszego zestawu lusterek). A symetria środkowa przeprowadza każdy wektor na wektor przeciwny (tak na prostej, jak na płaszczyźnie czy w przestrzeni), czyli na wektor o tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie.



Powstaje pytanie, czy zaprojektowany przez nas PIO to jedyna możliwa taka konstrukcja. W całej ogólności odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Jeśli lusterek jest więcej (a musi ich być nieparzysta liczba – dlaczego?), to można też je ustawić w PIO. Tyle że każdy układ nieparzystej liczby lusterek może być zastąpiony przez dający identyczny wynik układ trzech – dlaczego? (fakt ten jest nazywany w geometrii twierdzeniem o redukcji).

Dołączmy więc do naszego pytania dodatkowy warunek – lusterka mają być trzy (że jedno nie wystarczy, wie każdy, kto używał lustra). Czy wtedy nasza konstrukcja PIO jest jedyną możliwą?

Odpowiedź jest pozytywna. Wystarczy w przypadku, gdy dwa spośród lusterek nie są prostopadłe, wskazać promień, dla którego promień odbity będzie nierównoległy. Nazwijmy te dwa nie prostopadłe lusterka  $l_1$  i  $l_2$  (a trzecie  $l_3$ ).

Gdy  $l_1 \parallel l_2$ , to odbity w nich (w każdym raz) promień będzie miał i kierunek, i zwrot taki sam, jak promień padający (dlaczego?). W tej sytuacji, aby go odwrócić,  $l_3$  musiałoby być do niego prostopadłe. Żeby więc odwracać wszystkie promienie, musiałoby być prostopadłe do każdego z nich, a takich lusterek (płaszczyzn) nie ma.

Z kolei, gdy płaszczyzna  $l_1$  przecina płaszczyznę  $l_2$ , promień równoległy do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn może być odwrócony tylko przez lusterko  $l_3$  prostopadłe do tej krawędzi. Ale lusterko to nie odwróci promieni odbijających się od  $l_1$  i  $l_2$  (dlaczego?).

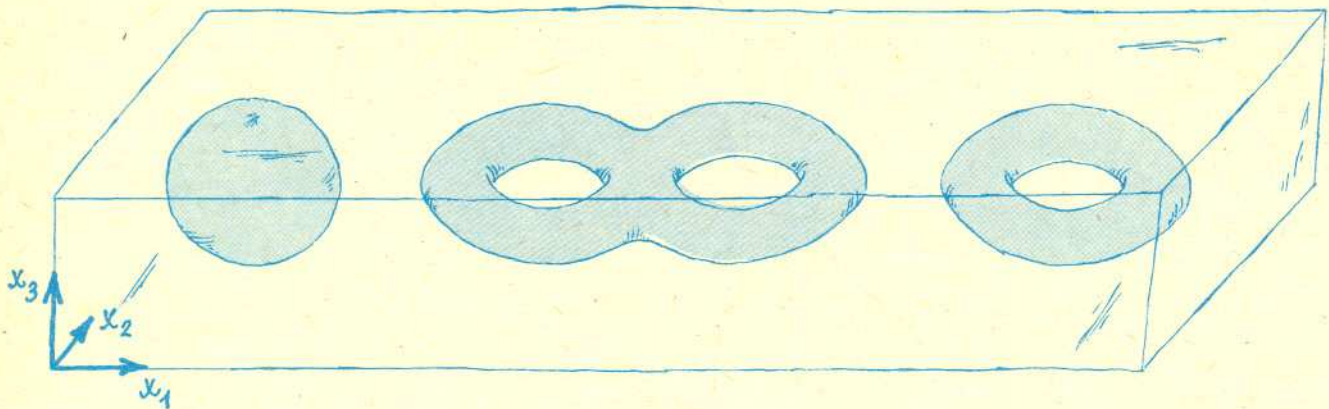
Czy wykazaliśmy więc, że nasz PIO jest jedynym możliwym? Otóż, nie. Wykazaliśmy tylko, że jest to jedyny możliwy PIO z płaskich lusterek. A co będzie z lusterkami o innym kształcie?

Tak się jednak składa, że produkowane PIO, zarówno te, z których złożone są światelka odbłaskowe, jak i te na Księżycu, są takie, jak opisaliśmy (tyle że z pryzmatów).



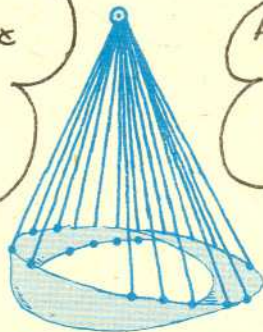
# ZANURZANIE ROZMAITOŚCI

SFERA, PRECEL I TORUS MAJĄ ZANURZENIA W PRZESTRZENI 3-WYMIAROWA.

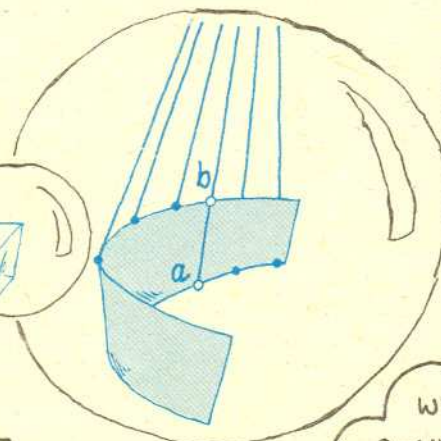
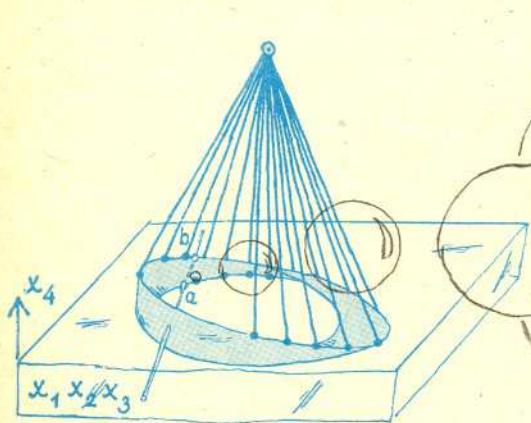


DLA PŁASZCZYZNY RZUTOWEJ, BUTELKI KLEINA I OGÓLNIJ SFER Z WLEPIONYMI WSTĘGAMI MÖBIUSA JEST ZBYT CIASNO W PRZESTRZENI 3-WYMIAROWEJ.

NIE MA SPOSOBU, ŻEBY POŁĄCZYĆ  
W NASZEJ PRZESTRZENI  
PUNKT  $\circ$  ROZKĄCZNYMI  
ODCINKAMI Z KAŻDYM  
PUNKTEM BRZEGU  
WSTĘGI



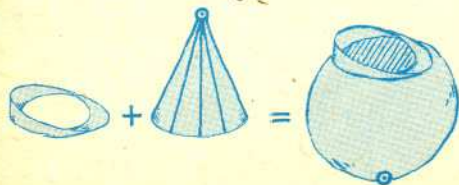
ALE MOŻNA TO BEZ  
TRUDU ZROBIĆ  
W PRZESTRZENI  
4-WYMIAROWEJ



GDYBY DWA Z TAKIYCH  
ODCINKÓW GDZIEŚ  
SIĘ SPOTKAŁY,  
TO BYŁOBY  
TAK.



ALE PROSTA  $ab$  NIE  
WYCHODZI POZA PODPRZESTRZEŃ  
3-WYMIAROWĄ, WŁEC PUNKT  $\circ$   
NIE MOŻE NA NIEJ  
LEŻEĆ!





**Skrót regulaminu**

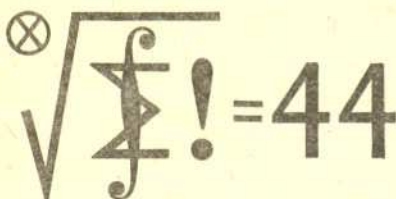
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 1990

**Zadania z matematyki nr 207, 208**

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA



**207.** Liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniają zależność

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$$

Dowieść, że dwa spośród ułamków będących składnikami lewej strony powyższej równości mają wartość 1 (a pozostały  $-1$ ).

**208.** Rozważmy ciąg funkcji  $(f_n)$  określonych na przedziale  $(0; \pi)$  wzorem rekurencyjnym:  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_{n+1}(x) = (\sin x)^{f_n(x)}$ . Dla każdej liczby naturalnej  $n$  obliczyć granicę prawostronną funkcji  $f_n$  w punkcie 0.

Zadanie 208 zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1990**

Przypominamy treść zadań:

**199.** Przez dowolny punkt  $P$  wysokości  $CM$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) prowadzimy półprostą  $AP^+$ ; przecina ona okrąg  $\Omega$  opisany na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $D$ . Przy jakim położeniu punktu  $P$  okrąg  $\Gamma$  styczny do odcinków  $PD, PB$  i łuku  $BD$  okręgu  $\Omega$  ma maksymalną średnicę?

**200.** Mamy sześcian zbudowany z  $n^3$  kostek. Na ile sposobów można go rozebrać zdejmując po jednym klocku? (Wolno za każdym razem zdjąć dowolny klocek, na którym nie stoi żaden inny.) Dla jakiego  $n$  znaleziona wartość przekroczy trylion?

**199.** Przyjmijmy oznaczenia:  $|CM| = h$ ,  $|MP| = x$ ;  $O, r$  – środek i promień okręgu  $\Omega$ ;  $Q, y$  – środek i promień okręgu  $\Gamma$ . Prosta  $PQ$  połowi kąt  $BPD$ . Jest więc równoległa do  $AB$ , wobec czego trójkąty  $PQM$  i  $PQB$  mają równe pola:

(1)  $|PQ| \cdot x = |PB| \cdot y$ .

Rozważając trójkąty prostokątne  $OPQ, PMB, OMB$  dostajemy zależności

(2)  $|PQ|^2 = |OQ|^2 - |OP|^2 = (r - y)^2 - |r + x - h|^2$ ,

(3)  $|PB|^2 = |MP|^2 + |OB|^2 - |OM|^2 = x^2 + r^2 - |h - r|^2$ .

Podnosząc (1) stronami do kwadratu i podstawiając (2), (3) otrzymujemy po przekształceniach równanie kwadratowe względem  $y$

$$ay^2 + by + c = 0$$

o współczynnikach

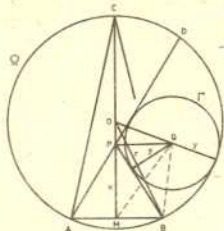
$$a = (2r - h)h, \quad b = 2rx^2, \quad c = x^2(h - x)(h - x - 2r).$$

Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest liczba

(4)  $y = x(h - x)/h$

(drugi pierwiastek jest ujemny, bo  $a > 0 > c$ ). Znaleziona wartość (4) osiąga maksimum, gdy  $x = \frac{1}{2}h$ , czyli gdy  $P$  jest środkiem odcinka  $CM$ .

(Warto zauważyć, że wzór (4) ma następującą interpretację: średnica okręgu  $\Gamma$  jest średnią harmoniczną długości odcinków, na które punkt  $P$  dzieli wysokość  $CM$ .)



**200.** Sześcian tworzy  $n^2$  kolumn („słupków”), po  $n$  klocków w każdej. Ponumerujemy te kolumny liczbami od 1 do  $n^2$ . Każdy kolejny ruch jest wyznaczony przez podanie numeru kolumny. Sposobów rozebrania sześcianu jest więc tyle, ile ciągów długości  $n^3$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, \dots, n^2\}$ , w których każdy symbol (od 1 do  $n^2$ ) występuje  $n$ -krotnie. Oznaczmy liczbę tych ciągów przez  $f(n)$ .

Miejsca zajęte przez symbol 1 ( $n$  miejsc) można ustalić na  $\binom{n^3}{n}$  sposobów. Zostaje  $n^3 - n$  miejsc;  $n$  spośród nich zajmuje symbol 2; można je wybrać na  $\binom{n^3 - n}{n}$  sposobów. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do równości

$$f(n) = \prod_{k=0}^{n^2-1} \binom{n^3 - kn}{n} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2} \prod_{k=0}^{n^2-1} \frac{(n^3 - kn)!}{(n^3 - (k+1)n)!} = (n^3)! (n!)^{-n^2}.$$

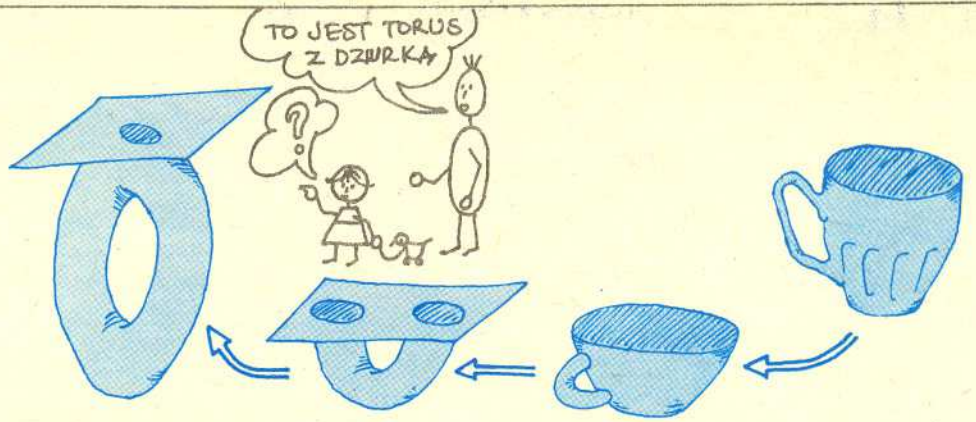
Już dla  $n = 3$  mamy

$$\begin{aligned} f(3) &= 27! \cdot 6^{-9} > \\ &> 27 \cdot 24^3 \cdot 21^3 \cdot 18^3 \cdot 15^3 \cdot 12^3 \cdot 9^3 \cdot (8!) \cdot 6^{-9} = \\ &= 3^{21} \cdot \left(\frac{8!}{2}\right)^3 \cdot (8!) \cdot 6^{-9} = 2^{-3} (8!)^4 (3^7 6^{-3})^3 > \\ &> 2^{-3} \cdot (4 \cdot 10^4)^4 \cdot 10^3 > 3 \cdot 10^{20}, \end{aligned}$$

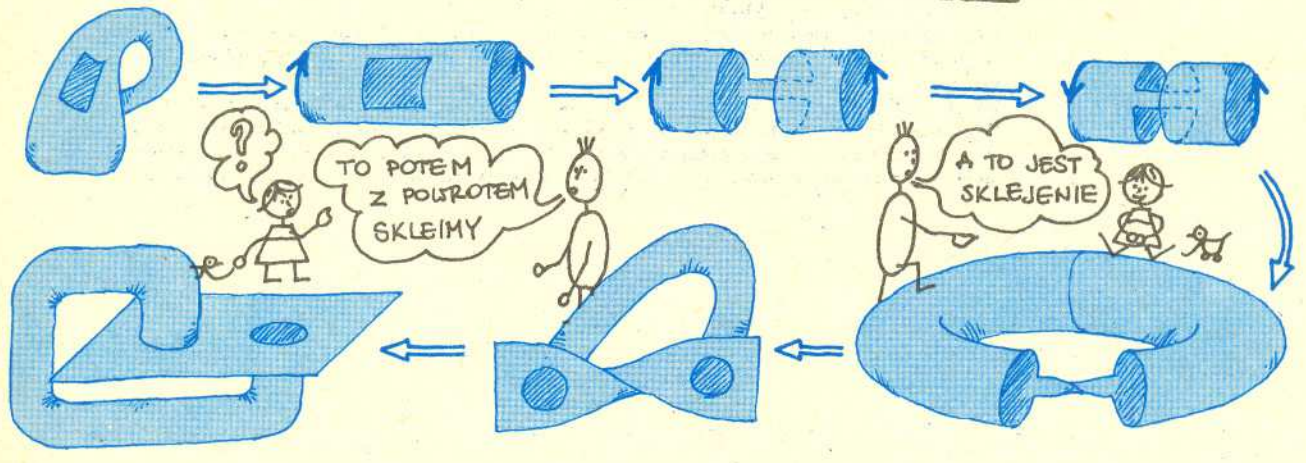
a więc kilkaset trylionów.

(Dla ciekawych: dokładna wartość  $f(3) = 1\ 080\ 491\ 954\ 750\ 208\ 000\ 000$ ; dalsze przybliżone wartości:  $f(4) = 1,04 \dots \cdot 10^{67}$ ,  $f(5) = 1,97 \dots \cdot 10^{157}$ .)

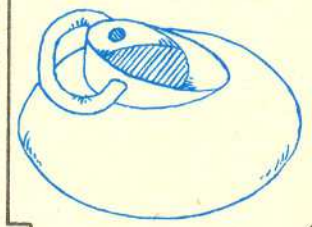
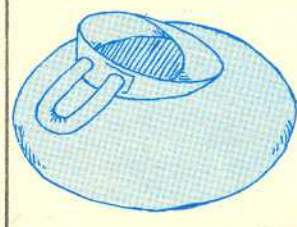
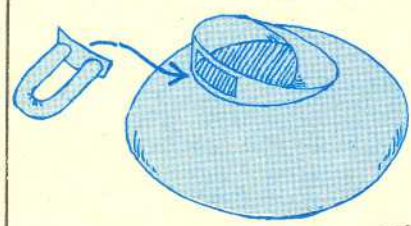
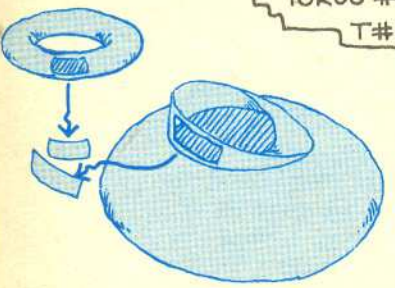




ROZMAITOSCI SA WŚRÓD NAS

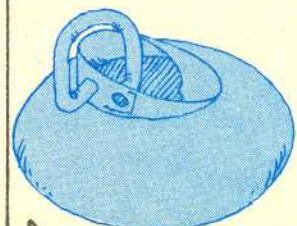
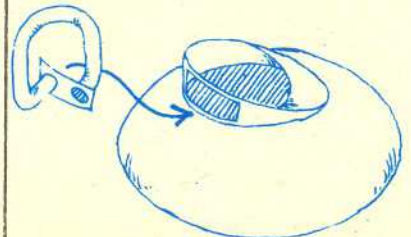
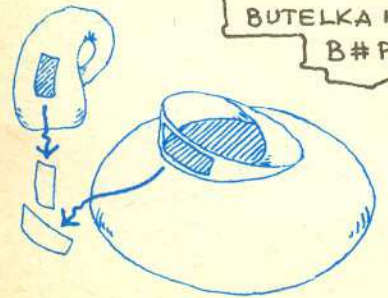


SUMA SPÓJNA:  
TORUS # PŁ. RZUTOWA  
 $T \# P$



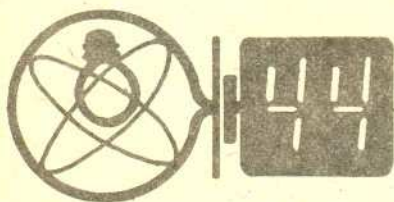
WYCHODZI DOKŁADNIE TO SAMO  
 $T \# P = B \# P$ , CHOCIAŻ  $T \neq B$ !

SUMA SPÓJNA:  
BUTELKA KLEINA # PŁ. RZUTOWA  
 $B \# P$





Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 XI 1990



**105.** Statek o okresie własnym kołysania poprzecznego równym  $T$  płynie z prędkością  $v$  przez fale oceaniczne o długości  $d$ , poruszające się z prędkością  $u$ . Przy spełnieniu jakich warunków wystąpią cztery różne „wrażliwe kursy” statku, dla których działanie fal na statek będzie wzbudzało jego drgania własne? Kurs statku określony jest przez wektor  $v$ .

**106.** Jednorodny, wiotki, cienki, obdarzony masą sznurek lub łańcuszek o długości  $l$ , zawieszony na jednym końcu, może wykonywać drgania poprzeczne o różnych częstotliwościach, którym odpowiada różna liczba węzłów (jeden z nich występuje zawsze w punkcie zawieszenia). Częstotliwości takich małych drgań są proporcjonalne do  $\sqrt{g/l}$  ( $g$  – przyspieszenie ziemskie). Obliczyć – w sposób numeryczny – pierwsze cztery częstotliwości małych drgań tego sznurka (tj. wyznaczyć bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności), przyjmując, że poszczególne elementy sznurka drgają harmonicznym z tą samą częstotliwością, lecz z różnymi amplitudami. Zachęcamy do porównania otrzymanych wyników z danymi doświadczalnymi.

**Rozwiązania zadań z numeru 4/1990**

**Przypominamy treść zadań:**

**97.** Wyobraźmy sobie w miejscu Ziemi oraz Marsa planety składające się wyłącznie z wody (i nie posiadające księżyców). Jakie co najmniej powinny być średnice tych planet, aby mogły one istnieć w sposób trwały?

**98.** Po tańi lodowiska otoczonego owalną bandą (rys. obok), ślizga się krążek hokejowy. Krążek wystrzelony jest z punktu  $A$  pod kątem  $\alpha$  względem osi lodowiska. Przy jakich wartościach kąta  $\alpha$  krążek wróci do punktu startowego? Zakładamy, że banda ogranicza figurę złożoną z kwadratu i dwóch połówek koła oraz że odbicia krążka są doskonale sprężyste.

**97.** Głównym czynnikiem decydującym o trwałości wodnej planety jest ucieczka cząsteczek wody z otaczającej planetę warstwy pary wodnej (atmosfera) w przestrzeni kosmicznej. Problem ucieczki gazu atmosferycznego z planety był omawiany w rozwiązaniu zadania 66 (*Delta* nr 7/1988), skąd czerpiemy wzór na promień planety

$$r_0 = \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G \rho \mu}}$$

( $R$  – stała gazowa,  $T$  – temperatura,  $G$  – stała grawitacji,  $\rho$  – gęstość planety,  $\mu$  – masa cząsteczkowa gazu atmosfery), przy którym średnia prędkość termiczna cząsteczek gazu jest równa prędkości ucieczki z planety. Atmosfera utrzymuje się na planecie w kosmicznej skali czasu, gdy promień planety  $r > wr_0$ , przy czym  $w = 5$  (patrz omówienie rozwiązań zadania 66 w numerze 1/1989). W przypadku planety wodnej atmosfera odnawia się przez parowanie wody (ew. sublimację lodu), co prowadzi do ubytku substancji planety. Ponieważ względny ubytek masy planety jest znacznie mniejszy od względnego ubytku masy atmosfery, można (szacunkowo) przyjąć  $w \cong 1$ .

Temperatury na wodnych planetach powinny być zbliżone do panujących na Ziemi ( $\sim 280$  K) oraz Marsie ( $\sim 230$  K). Odpowiadające tym temperaturom wartości  $r$  wynoszą odpowiednio 840 km oraz 760 km, a więc minimalny promień jest rzędu 1000 km.

**98.** W związku z tym, że krążek ślizga się po lodzie z pewnym tarciem, a więc zasięg jego toru jest ograniczony, bierzemy pod uwagę jedynie niewielką liczbę odbić krążka od bandy.

Algorytm programu komputerowego, który znajdzie poszukiwane wartości kąta  $\alpha$ , może wyglądać jak niżej: Dla kolejnych wartości kąta  $\alpha$ :  $\alpha_k = k\Delta\alpha$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Delta\alpha$  – bardzo mały kąt) dokonujemy następujących operacji:

- (1) wyznaczamy równanie prostej  $p_1$  pierwszego odcinka toru;
- (2) znajdujemy współrzędne punktu  $P_1$  pierwszego odbicia od bandy (punkt przecięcia prostej  $p_1$  z bandą);
- (3) wyznaczamy równanie stycznej  $s_1$  do bandy w punkcie  $P_1$ ;

- (4) na podstawie równań prostych  $p_1$  i  $s_1$  wyznaczamy równanie prostej  $p_2$  drugiego odcinka toru;
- (5) powtarzamy operację (2) dla prostej  $p_2$  wyznaczając punkt  $P_2$  drugiego odbicia;
- (6) sprawdzamy, czy punkt  $P_2$  nie pokrywa się z punktem startowym  $A$  (ze względu na skończoną wartość  $\Delta\alpha$  oraz na niedokładności obliczeń numerycznych przyjmujemy, że omawiane punkty się pokrywają, jeżeli odległość między nimi jest mniejsza od  $\epsilon \ll R$ , gdzie  $R$  – promień półokręgów), jeśli tak – wypisujemy wartość kąta  $\alpha_k$ , dla którego nastąpił powrót krążka do punktu  $A$ , jeśli nie – kontynuujemy dalsze operacje, wyznaczając kolejne  $p_i$  oraz  $P_i$ , aż np. do  $i = 5$ .

Przy prawidłowym doborze wartości  $\Delta\alpha$  i  $\epsilon$  jako odpowiedź powinno się z reguły otrzymywać nie pojedyncze wartości  $\alpha_k$ , lecz ich serie dla kolejnych kilku (kilkudziesięciu) wartości  $k$ . Zbyt duże  $\Delta\alpha$  lub zbyt małe  $\epsilon$  stwarzają niebezpieczeństwo „zgubienia” pewnych rozwiązań, które przypadną między dwoma kolejnymi kątami  $\alpha_k$  i  $\alpha_{k+1}$ .

Wyniki obliczeń komputerowych, wykonanych dla  $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-7} \pi$ ,  $\epsilon = 10^{-3} R$ , są przedstawione na histogramie (dolny rysunek na tylnej okładce). Na osi odciętych zaznaczono wartości kąta  $\alpha \in (0, \pi/2)$  spełniające warunki zadania. Wysokość odcinków odpowiada liczbie kątów  $\alpha_k$  występujących w każdej serii (co stanowi miarę tolerancji błędów, jaki można popełnić wystrzelując krążek pod danym kątem); rozpiętość kątów w serii wynosi tu co najwyżej około  $0,01^\circ$ , jest więc mniejsza od dokładności wykresu. Przy każdym odcinku podano liczbę występujących odbić (maksymalnie cztery) oraz oznaczenia literowe.

Na górnym rysunku na tylnej okładce pokazane są tory dla 1, 2 i 3 odbić. Dodatkowo trzeba jeszcze uwzględnić tory utworzone przez odbicia symetryczne względem długiej osi lodowiska. Okazuje się, że pomimo bardzo małej wartości kroku  $\Delta\alpha$  nie wszystkie z tych torów w przypadku 4 odbić pojawiły się w obliczeniach. Nie ma więc gwarancji, że któreś z rozwiązań dla większej liczby odbić nie zostanie przeoczone. Zastosowane symbole literowe odpowiadają oznaczeniom na histogramie. Para tych samych liter z primem i bez odpowiada temu samemu torowi (bądź dwóm torom symetrycznym) przebieganemu w dwóch kierunkach.



# ŁOŚCI W PRZESTRZENI

