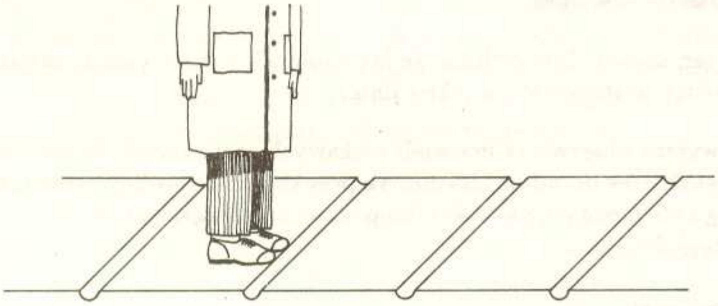
Spacerujący matematyk

Zbigniew MARCINIAK

Gdy odbywam długie spacery, pewien fakt nieustannie zwraca moją uwagę. O ile zachowuję stałą długość kroku, wciąż zdarza się, że następuję na linie oddzielające kolejne płyty chodnika. Dlaczego tak się dzieje?

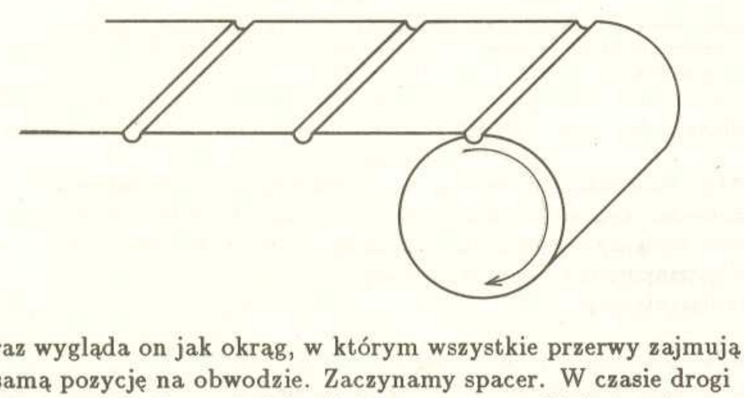
Spróbujmy sformułować powyższe zagadnienie jako problem matematyczny. Załóżmy, że chodnik jest zbudowany z płyt w kształcie prostokątów, każdy o długości 1 m. Kolejne płyty są oddzielone wąskimi przerwami. Aby podkreślić fakt, że przerwy są rzeczywiście wąskie, ich szerokość oznaczymy przez ε. Załóżmy również, że przed rozpoczęciem spaceru stoję w ten sposób, iż czubki moich butów dotykają przerwy między płytami.



Aby uniknąć niejednoznaczności w definicji „następowania na linię", wyrażę ją w ścisły sposób: następuję na linię tylko wtedy, gdy czubek mojego buta dotyka jednej z przerw o szerokości ε. Pytanie: czy mogę tak dobrać długość l mojego kroku, aby nie następować na linie?

Oczywiście, $l = 1$ jest wyborem najgorszym z możliwych: w tej sytuacji następuję na każdą linię. Większe liczby naturalne wcale nie są lepsze: w każdym kroku będę następował na linię. Żadna z liczb wymiernych nie jest również dobrym wyborem: gdy będzie to $\frac{p}{q}$, po każdych q krokach również powtarza się poprzedni przypadek. A co stanie się, gdy wybiorę l niewymierne, np. $\sqrt{2}$?

Aby uprościć rozważania, wyobraźmy sobie, że chodnik zwinęliśmy jak dywan.



Teraz wygląda on jak okrąg, w którym wszystkie przerwy zajmują tę samą pozycję na obwodzie. Zaczynamy spacer. W czasie drogi zaznaczamy na okręgu kolejne ślady $x_1, x_2 \ldots$ czubków butów.

Magia cykloid

Elżbieta BOBIK

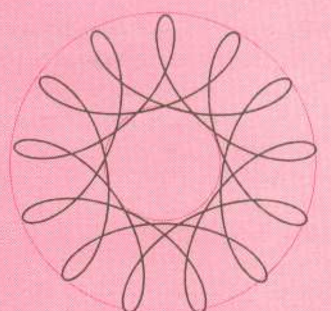
Magiczne krążki

Od czasu do czasu pokazują się w sklepach tzw. spirografy – zestawy służące do rysowania ciekawych wykresów. Niedawno znów pojawiły się one w kioskach Ruchu, tym razem pod nazwą „magiczne krążki". Taki zestaw składa się z dwóch krążków z wyciętymi kilkoma małymi otworkami i dwóch szablonów w kształcie kwadratu z dużym wyciętym otworem (rysunek na tylnej okładce).

Aby sporządzić rysunek, należy umieścić krążek w otworze szablonu, a następnie do otworka w krążku włożyć koniec ołówka i dociskając ołówkiem krążek do ściany otworu szablonu wykonywać krążkiem ruchy kołowe (patrz rysunek na tylnej okładce). Dobierając różne szablony można otrzymać wiele ciekawych rysunków.

„Magiczne krążki" można również sporządzić samemu, wycinając każdy element ze sklejki. W przypadku trudności ze zrobieniem ząbków można na brzeg krążka naciągnąć zwykłą gumkę aptekarską, która równie dobrze zapobiega ślizganiu się krążka wewnątrz otworu.

Każda krzywa rysowana za pomocą „magicznych krążków" będzie mieściła się w pierścieniu, którego promienie nietrudno określić.



Rys. 1

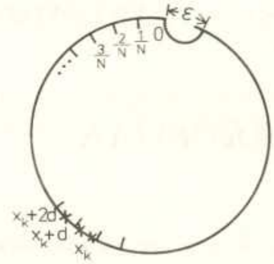
W trakcie rysowania krążek toczy się wewnątrz otworu szablonu. Jeśli przetoczy się jeden raz wzdłuż swego obwodu, otrzymamy kawałek krzywej. Nazwijmy go gałęzią. Każde następne przetoczenie się krążka to następna gałąź krzywej. Gdyby krążek po wykonaniu pewnej liczby przetoczeń znalazł się ponownie w położeniu początkowym, wtedy każda następna gałąź pokrywałaby się z gałęzią już narysowaną. Taką krzywą, która od pewnej chwili zaczyna biec sama po sobie, nazwijmy krzywą zamkniętą. Krążek wróci do swego położenia początkowego jedynie w tych przypadkach, gdy jego obwód i obwód otworu szablonu będą wielkościami współmiernymi, tzn. gdy będzie istniała ich wspólna wielokrotność. Jest to równoważne warunkowi, że stosunek długości promienia krążka (r) do długości promienia otworu (R) jest liczbą wymierną. Jeśli liczba ta (po uproszczeniu) jest równa p/q, to q obwodów krążka ma tę samą długość co p obwodów otworu, więc wykonując q przetoczeń krążek obiegnie p razy wnętrze otworu, zanim wróci do położenia początkowego. Tym samym krzywa zatoczy q łuków przecinając samą siebie w przynajmniej $q(p-1)$ punktach, a następnie zacznie biec po sobie samej.

A jeżeli stosunek r/R jest liczbą niewymierną? Wtedy obwód krążka i obwód otworu będą wielkościami niewspółmiernymi i krzywa nigdy się nie zamknie. Będzie ona coraz gęściej wypełniała pierścień, którym jest ograniczona, jednakże nigdy całkowicie go nie wypełni. Zawsze zostanie nieskończenie wiele punktów, przez które krzywa jeszcze nie przeszła i nigdy nie przejdzie. Niemniej krzywa prędzej czy później przybliży się do każdego z tych punktów na dowolnie małą odległość. W języku topologii oznacza to, że zbiór punktów krzywej jest gęsty w zbiorze punktów pierścienia.

Wielkości elementów zestawu „magicznych krążków" są tak dobrane, że każda krzywa, jaką możemy za ich pomocą narysować, jest krzywą zamkniętą.

Przypuśćmy, że chcemy tak ulepszyć zestaw, by móc rysować krzywe o jeszcze innych kształtach. Gdyby w tym celu wyciąć dodatkowe otworki w krążkach, to „nowe" krzywe nie różniłyby się istotnie od „starych" i, oczywiście, nadal byłyby zamknięte. Żeby zrozumieć dlaczego tak będzie, wyobraźmy sobie, że otworki zamiast na całej powierzchni krążka są rozmieszczone tylko na jego promieniu. Leżałyby one wtedy bardzo blisko „jeden przy drugim" i dlatego wycięcie otworków pośrednich nie wzbogaciłoby zbytnio zestawu możliwych do uzyskania krzywych. Chyba że dodatkowe otworki umieścilibyśmy na obu końcach promienia krążka. Aby stwierdzić, jakie krzywe wtedy otrzymamy, przeanalizujmy rysunek z okładki. Przedstawione na nim krzywe narysowano za pomocą jednego szablonu i jednego krążka, przy czym koniec ołówka umieszczany był w otworkach leżących coraz bliżej środka krążka. Obserwując, jak zmienia się kształt krzywej, łatwo sobie wyobrazić krzywą narysowaną przez otworek pośredni i równie łatwo odgadnąć, że jeśli umieścimy koniec ołówka w środku

Teraz robimy tak. Wybieramy liczbę naturalną N spełniającą warunek $1/N < \varepsilon$. Dzielimy obwód naszego okręgu na N równych łuków, każdy o długości $1/N$ m.



Ponieważ liczby $x_1, x_2 \ldots$ są niewymierne, żadna z nich nie wypadnie na punkcie podziału. Jak wynika z zasady szufladkowej Dirichleta, istnieją punkty x_k, x_{k+d}, które leżą na tym samym łuku o długości mniejszej niż ε. Wobec tego punkty $x_k, x_{k+d}, x_{k+2d}, \ldots$ dają podział całego okręgu i to taki, że dwa dowolne, kolejne punkty są odległe o mniej niż ε. W końcu jedna para punktów musi trafić w przerwę.

Zasada szufladkowa Dirichleta: rozmieszczamy n przedmiotów w m szufladach – gdy $n > m$, to przynajmniej w jednej z szuflad będą co najmniej dwa przedmioty.

Tutaj: ponieważ punktow x_i możemy wziąć dowolnie wiele, więc – po pewnym czasie – zaczniemy umieszczać je w przedziałach, w których już poprzednio znalazł się jakiś punkt.

W ten sposób dowiedliśmy, że jakiekolwiek wybierzemy l, zawsze musimy następować na jakieś linie.

Powyższa obserwacja ma wiele ciekawych zastosowań. Zachęcamy Czytelników do udowodnienia na przykład, że dowolny skończony ciąg cyfr może pojawić się jako początek dziesiętnego zapisu pewnej potęgi dwójki.

Zadania

M 604. Punkt P ma tę własność, że dla pewnego trójkąta ABC pola trójkątów ABP, BCP i CAP są równe. Wykazać, że P jest środkiem ciężkości (tj. punktem przecięcia środkowych) tego trójkąta.
Rozwiązanie na str. 8

M 605. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w takim punkcie P, że pola trójkątów ABP i CDP są równe. Wykazać, że czworokąt ten jest trapezem.
Rozwiązanie na str. 8

M 606. Punkt P ma tę własność, że dla pewnego wypukłego czworokąta $ABCD$ pola trójkątów ABP, BCP, CDP i DAP są równe. Wykazać, że jedna z przekątnych tego czworokąta połowi drugą.
Rozwiązanie na str. 11

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA

F 310. Kondensator połączony szeregowo z oporem o rezystancji R naładowano za pomocą baterii o napięciu U. Podczas ładowania na oporze wydzieliło się ciepło Q. Obliczyć pojemność kondensatora (opór wewnętrzny baterii należy zaniedbać).
Rozwiązanie na str. 10

F 311. Z kranu, pionowo w dół wypływa strumień wody. Na odcinku 60 cm przekrój strumienia maleje o połowę. Obliczyć prędkość wypływu z kranu.
Rozwiązanie na str. 10