

O zasadzie najmniejszego działania

Paweł KRAWCZYK

Bloczki, równie pochyłe, wahadła, baki – oto, z czym zwykle kojarzy się zwrot „mechanika klasyczna”. Czy może być coś interesującego w zagadnieniach tego typu? Czy może być interesująca dziedzina systematycznie badana od trzystu lat, dziedzina, w której chyba wszystkie dające się rozwiązać problemy dawno już rozwiązano?

A jednak... Czytelnik byłby zapewne zdziwiony mnogością podręczników z mechaniki klasycznej i to nie tylko tych szacownych, istniejących już od dziesiątków lat, ale też i tych nowych, napisanych ostatnio. Nie jest to bynajmniej przejaw akademickiego zaślepienia ich autorów, którzy poza ukochaną dziedziną nie dostrzegają interesujących tematów. Co prawda, mechanika potrafi urzec swą matematyczną strukturą, precyzją twierdzeń i wielością sformułowań. Nie jest to jednak najistotniejsze. Rzecz raczej w odniesieniu mechaniki do innych dziedzin fizyki, szczególnie tych, które wciąż jeszcze są tworzone. Niektóre bowiem z formalizmów mechaniki klasycznej dają się w naturalny sposób uogólnić i stają się punktem wyjścia dla budowy i opisu nowych działów fizyki. Aktualny stan badań w pozornie nie związanej z mechaniką dziedzinie może więc rzucić nowe światło na mechanikę, zmieniając nasze wyobrażenia o tym, co jest w niej mniej lub bardziej ważne. I to jest bodaj główna przyczyna powstawania wciąż nowych podręczników tej klasycznej już wiedzy.

Przez wiele lat ulubioną metodą fizyków kwantowych, zaczerpniętą z mechaniki klasycznej, był tzw. formalizm kanoniczny. Jednakże osiągnięcia ostatniego dwudziestolecia w teorii cząstek elementarnych i kwantowej teorii pola przywróciły nadszarpięty autorytet intuicyjnie łatwiejszemu i historycznie wcześniejszemu formalizmowi lagranżowskiemu. Opis niektórych jego aspektów jest tematem naszego artykułu. Notabene, w dziedzinach takich, jak klasyczna teoria pola, podejście lagranżowskie nigdy nie utraciło „palmy pierwszeństwa”.

Wszyscy Czytelnicy *Delt*y wiedzą, że mechanikę klasyczną (punktów materialnych) można ująć w formie trzech zasad dynamiki Newtona. Nie jest to jednak sformułowanie jedyne, a nawet – w wielu przypadkach – najwygodniejsze. W naszych rozważaniach oprzemy się na alternatywnym sformułowaniu zwanym zasadą najmniejszego działania.

Rozważmy punkt materialny, którego położenie w dowolnej chwili możemy scharakteryzować przez podanie wektora wodzącego \vec{r} . Dowolną funkcję czasu, $\vec{r}(t)$, nazwiemy trajektorią tego punktu (ponieważ nie orzekamy, czy taka właśnie funkcja czasu realizowana jest podczas ruchu, czy też nie, moglibyśmy również mówić o trajektoriach możliwych). Jeżeli w chwili t_A punkt materialny znajdował się w punkcie A (o wektorze wodzącym \vec{r}_A), zaś w chwili t_B znajdzie się w pewnym dowolnym punkcie B (o wektorze wodzącym \vec{r}_B), to zasada najmniejszego działania stwierdza, że w czasie ruchu realizowana jest ta spośród wszystkich możliwych trajektorii spełniających warunek

$$\vec{r}(t_A) = \vec{r}_A, \quad \vec{r}(t_B) = \vec{r}_B,$$

dla której uśredniona względem czasu i pomnożona przez $(t_B - t_A)$ różnica między energią kinetyczną i potencjalną jest minimalna.

Zasada najmniejszego działania należy do najogólniejszych zasad fizyki teoretycznej. Czytelnik może znaleźć więcej informacji o niej w znakomitych *Feynmana wykładach z fizyki*, t. II, cz. 1. Pisaliśmy o niej również w *Delcie* 6/1985.

Dla porządku dodajmy, że tak naprawdę trajektorie muszą spełniać pewne dodatkowe warunki, jak np. różniczkowalność, w pewnych zaś patologicznych przypadkach działanie – bo tak właśnie nazywa się średnia różnica energii kinetycznej i potencjalnej pomnożona przez czas ruchu – nie jest minimalne, lecz na odwrót – maksymalne. Są to jednak komplikacje, o których możemy spokojnie zapomnieć.

Siły pływowe na Ziemi i w Układzie Słonecznym

Andrzej KRASIŃSKI

1. Siły bezwładności.

Wszystko, co trzeba wiedzieć o siłach bezwładności, aby zrozumieć dalszy ciąg artykułu, można znaleźć w moim artykule w *Delcie* 3/1980. Przypomnijmy więc tylko podstawowe fakty w skrócie.

Pierwsze prawo dynamiki Newtona mówi, że ciało, na które nie działają żadne oddziaływania zewnętrzne, będzie poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym albo pozostawało w spoczynku. Stwierdzenie to jest w gruncie rzeczy definicją pewnej klasy układów odniesienia zwanych **układami inercjalnymi**, założeniem zaś mechaniki Newtona jest, że takie układy odniesienia istnieją. Nasze otoczenie jest przeniknięte siłami grawitacyjnymi Ziemi i sąsiednich obiektów astronomicznych i nie jest wcale oczywiste, gdzie należałoby szukać układów inercjalnych.

W układzie, który nie jest inercjalny, ciała niekoniecznie będą poruszały się po liniach prostych albo ze stałymi prędkościami, mogą one doświadczać niespodziewanych zmian kierunku lub przyspieszeń. Przykładem układu nieinercjalnego jest wnętrze autobusu (zakładamy na chwilę, że powierzchnia Ziemi jest układem inercjalnym – wrócimy jeszcze do tego problemu). W przyspieszającym autobusie pasażerowie czują siłę ciągnącą ich do tyłu, w hamującym autobusie pewna siła pcha ich do przodu, na zakręcie zaś podobna siła usiłuje wypchnąć ich na zewnątrz zakrętu. Narciarz rozpoczynający zjazd musi wychylić się do przodu, aby nie upaść na plecy pod wpływem siły, która nie działała na niego, dopóki stał w miejscu. Siły, pojawiające się w układach odniesienia poruszających się ruchem przyspieszonym, są nazywane **siłami bezwładności**. W układzie poruszającym się z przyspieszeniem \vec{a} siła bezwładności jest równa $-m\vec{a}$, gdzie m jest masą ciała doświadczającego przyspieszenia. Proszę zauważyć, że siła bezwładności ma zwrot przeciwny do wywołującego ją przyspieszenia.

Wyobraźmy sobie teraz ciało o masie m spadające swobodnie w polu grawitacyjnym o natężeniu \vec{g} . Siła grawitacyjna działająca na to ciało jest wtedy równa $m\vec{g}$, przyspieszenie w spadku swobodnym wynosi \vec{g} , siła bezwładności wynosi więc $-m\vec{g}$, zatem siła wypadkowa działająca na ciało, mierzona w układzie odniesienia spadającym wraz z badanym ciałem, wynosi $m\vec{g} - m\vec{g} = 0$. Ciało spadające swobodnie nie doświadcza więc żadnych sił i jest jedną z możliwych realizacji układu inercjalnego. Zauważmy jednak, że taki układ (nazywany **lokalnym układem inercjalnym**) przestaje być inercjalny w dużych odległościach od swobodnie spadającego ciała. Wystarczy wyobrazić sobie dwa obiekty swobodnie spadające po przeciwnych stronach Ziemi. Każdy z tych obiektów będzie miał niezerowe przyspieszenie względem drugiego, a więc nie będą one dla siebie nawzajem inercjalnymi układami odniesienia.

Jak duży jest lokalny układ inercjalny? Wyobraźmy sobie na chwilę jednorodne pole grawitacyjne (jest to obiekt nieistniejący w realnym świecie). Jego natężenie \vec{g} jest wszędzie takie samo, a więc jakiegokolwiek dwa swobodnie spadające ciała będą poruszały się z takim samym przyspieszeniem \vec{g} . Względne przyspieszenie tych dwu ciał będzie więc równe zeru, czyli będą poruszać się jedno względem drugiego po linii prostej ze stałą prędkością. Widać stąd, że układ odniesienia związany ze swobodnie spadającym ciałem jest układem inercjalnym w całym obszarze, w którym pole grawitacyjne można uważać za jednorodne.

Rzeczywiste pola grawitacyjne, występujące w przyrodzie, nie są jednorodne. Ich linie sił są zbieżne, a natężenie pola grawitacyjnego zmienia się wzdłuż nich (rośnie w kierunku źródła). Lokalny układ inercjalny jest więc ściśle inercjalny tylko wzdłuż każdego pojedynczego toru spadku swobodnego, i jest w przybliżeniu inercjalny w takim otoczeniu owego toru, w którym zbieżność linii sił jest zaniedbywalnie mała (na przykład, nie może być zmierzona przyrządem pomiarowym o danej dokładności – należy pamiętać, że wielkość układu lokalnego zawsze będzie zależała od dokładności naszych pomiarów).

Zauważmy, że znoszenie sił grawitacyjnych przez siły bezwładności zachodzi nie tylko dla ciał spadających wprost ku środkowi Ziemi. Zachodzi ono także na orbitach

Najkrótsza nawet chwila namysłu nad zasadą najmniejszego działania wskazuje, że stanowi ona sformułowanie mechaniki zgoła zdumiewające. Po pierwsze, różni się ona drastycznie od zasad Newtona i nie jest bynajmniej oczywiste, że obydwa sformułowania są równoważne. Spróbujmy więc wyprowadzić drugą zasadę dynamiki z zasady najmniejszego działania. Nie jest to łatwe, gdyż dziedziną, na której obliczamy działanie, jest zbiór możliwych trajektorii, a więc zbiór funkcji, a nie liczb i nie możemy stosować zwykłych metod szukania ekstremum, o którym mowa w zasadzie. Zaatakujmy więc problem sposobem i podzielmy przedział czasowy $[t_A, t_B]$ na N podprzedziałów o tej samej długości $\Delta t = (t_A - t_B)/N$. Wyróżnimy w ten sposób na osi czasowej $N + 1$ równo odległych punktów i zastępujemy uśrednianie energii kinetycznej i potencjalnej względem całego przebiegu czasowego, uśrednianiem względem tych dyskretnych punktów. W celu jeszcze dalszego uproszczenia ograniczymy się wyłącznie do ruchów jednowymiarowych (opisanych zmianami współrzędnej x). Jeśli wybraliśmy dostatecznie małe przedziały Δt , to prędkość w i -tym przedziale jest prawie stała i wynosi w przybliżeniu

$$v_i \simeq \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t},$$

gdzie $x_i = x(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ i $x_0 = x_A$, $x_N = x_B$. Energia kinetyczna przybierze więc postać

$$T_i \simeq \frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2.$$

Pojawia się teraz pytanie, jaką wielkość wziąć za dyskretną reprezentację energii potencjalnej V . W zwykłym podejściu jest ona ciągłą funkcją położenia $V = V(x)$. Od razu nasuwają się więc cztery możliwe sposoby wyboru energii potencjalnej w i -tym przedziale czasowym: $V(x_i)$, $V(x_{i-1})$, $V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$, $\frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})]$. Okazuje się, że każdy z nich może być użyty z równie dobrym skutkiem. Tutaj zdecydujemy się na ostatnią możliwość, gdyż nie narusza ona symetrii między końcowymi punktami przedziału (jak pierwsze dwie) i nie wprowadza nowych punktów (jak trzecia). Po tych rozważaniach jesteśmy gotowi do wypisania przybliżonego wzoru na działanie.

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})] \right\} \cdot (t_A - t_B) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})] \right\} \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Przybliżenie nasze jest tym lepsze, im mniej zmienia się na każdym z małych przedziałów Δt prawdziwa wartość energii kinetycznej i potencjalnej, a więc powinno się poprawiać, gdy N rośnie. W granicy $N \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$) otrzymujemy prawdziwą wartość działania.

„Wtajemniczeni” bez trudu spostrzegą, że w granicy $N \rightarrow \infty$ nasze wyrażenie na działanie staje się całką Riemanna postaci

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt.$$

Funkcja podcałkowa jest równie ważnym obiektem co działanie i nosi nazwę lagranżjanu.

W ujęciu dyskretnym trajektoria staje się po prostu zbiorem liczb $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$. Tym samym, działanie możemy uważać teraz za funkcję $N - 1$ zmiennych x_1, \dots, x_{N-1} (punkty x_0 i x_N są ustalone) i względem tych zmiennych przeprowadzić minimalizację S . Jeśli zasada najmniejszego działania ma być słuszna, to musi zachodzić

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Różniczkowanie powyższe łatwo możemy wykonać explicite: i -ta zmienna występuje jedynie w i -tym i $i+1$ -szym składniku sumy określającej S . A zatem dostaniemy

$$m \cdot \frac{(x_i - x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_i} = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że w granicy $\Delta t \rightarrow 0$ wzór powyższy przybiera postać

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} = 0,$$

a ponieważ przyspieszenie definiujemy jako drugą pochodną położenia i z definicji energii potencjalnej wynika, że $-\frac{dV}{dx}$ jest po prostu siłą, tym samym wzór powyższy pokrywa się z drugą zasadą dynamiki Newtona.

Zaprezentowanemu wywodowi drugiej zasady dynamiki z zasady najmniejszego działania daleko jest do matematycznej ścisłości. Zauważmy jednak, że uwaga ta nie dotyczy wspomnianej możliwości, iż działanie staje się maksymalne, a nie minimalne. Żądaliśmy bowiem jedynie znikania pochodnej $\frac{\delta S}{\delta x_i}$, co obejmuje obydwie przypadki, jak również możliwość istnienia punktu stacjonarnego (co czasem też się zdarza).

Co z pozostałymi zasadami? – zapyta Czytelnik. Cóż, pierwszą z nich przemyciliśmy formułując zasadę najmniejszego działania – zasada wymaga podania wzoru na energię kinetyczną. Powiedzenie, że ten wzór to $\frac{1}{2}mv^2$, jest słuszne jedynie w układzie inercyjnym. Wtedy też dostajemy ruch jednostajny prostoliniowy. Jeżeli chodzi o trzecią zasadę dynamiki, to orzeka ona o siłach działających pomiędzy ciałami, wymaga więc wyjścia poza mechanikę punktu materialnego, czego w tym artykule nie robimy. Ale również trzecia zasada dynamiki znajduje w przedstawionym formalizmie swój wyraz.

Trzecia zasada dynamiki wiąże ze sobą siłę \vec{F}_{AB} , z jaką punkt B działa na punkt A , z siłą $\vec{F}_{BA} (= -\vec{F}_{AB})$, z jaką punkt A działa na B . Ograniczmy się do układu dwóch punktów materialnych. Działanie w tym przypadku nadal określamy jako średnią czasową różnicę energii kinetycznej i potencjalnej (całkowitych). Trzecią zasadę dynamiki odtworzymy zakładając, że energia potencjalna zależy nie od indywidualnych położań, lecz jedynie od ich różnic.

Druga zasada dynamiki wiąże ze sobą przyczynę (siłę) i skutek (przyspieszenie) i na tej podstawie pozwala – przy znajomości położenia i prędkości w pewnej chwili – określić położenie i prędkość w chwili następnej. Ruch w tym opisie składa się z wielkiej liczby małych kroczków powiązanych związkiem przyczynowo-skutkowym. Inaczej jest w zasadzie najmniejszego działania. Tam, poruszająca się cząstka w jakiś sposób „wie” od samego początku, jak ma się poruszać w przeciągu całego trwania ruchu, „przeczuwa”, że ruch nie zostanie przerwany aż do osiągnięcia swego celu. Nie może na początku biec zbyt wolno, bo w końcowej fazie wymagałoby to nadmiernych prędkości i – co za tym idzie – nieminimalnej wartości działania. Interpretację taką jest niezmiernie trudno pogodzić z przyczynowym (kauzalnym) opisem świata, który przecież leży u podstaw fizyki! Fakt ten sugeruje, że mechanika klasyczna nie jest teorią pełną (choć nie ma tu żadnej wewnętrznej sprzeczności o charakterze formalnym). I ta właśnie obserwacja może posłużyć do rozwinięcia pewnego sformułowania mechaniki kwantowej.

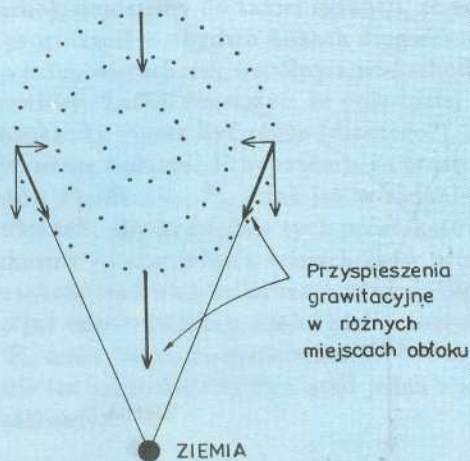
kołowych, w tym przypadku siła grawitacji $m\vec{g}$ jest równoważona przez siłę odśrodkową $mv^2/r = mg$, gdzie m jest masą obiektu krążącego po orbicie, v – jego prędkością, r – odległością od środka Ziemi. Siła odśrodkowa jest siłą bezwładności wywołaną przez przyspieszenie \vec{g} odchylające tor ciała od linii prostej. Na orbicie eliptycznej ruch ciała jest złożeniem ruchu obiegowego oraz spadku swobodnego (lub swobodnego ruchu w górę – siła grawitacji zmniejsza wtedy prędkość), również wtedy siła grawitacyjna jest znoszona przez siły bezwładności, chociaż rachunek byłby trochę bardziej skomplikowany.

2. Siły pływowe.

Wyobraźmy sobie kulisty obłok złożony z małych obiektów, nie oddziałujących na siebie żadnymi siłami (zapomnijmy na chwilę o ich wzajemnym przyciąganiu grawitacyjnym) i spadający swobodnie w polu grawitacyjnym bardzo dużego obiektu (np. Ziemi) wprost ku jego środkowi, z prędkością początkową równą zeru (rys. 1a). Przypomnijmy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

$$\vec{g} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3},$$

gdzie G – stała grawitacyjna, M – masa Ziemi, r – odległość obiektu od Ziemi. Ponieważ obiekty znajdujące się w „górnjej” („tylnej”?) części obłoku są zawsze dalej od Ziemi niż obiekty w dolnej części obłoku, przyspieszenie tylnej części będzie zawsze mniejsze od przyspieszenia przedniej części. Ta różnica przyspieszeń wywoła różnicę w prędkościach, stale narastającą. W rezultacie dolna część obłoku będzie oddalała się od górnej. Równocześnie przyspieszenia bocznych



Rys. 1a. Obłok swobodnie spadających obiektów, w chwili początkowej mający kształt kulisty...



Rys. 1b. ...wydłuż się podczas lotu i zwęży wskutek różnic w natężeniu pola grawitacyjnego w sąsiednich punktach.

komentarz do artykułu *O zasadzie najmniejszego działania*

Po raz kolejny dwóch fizyków z redakcji *Delty* nie może dojść do porozumienia. Tym razem przyczyna niezgody jest dość typowa – różnice w interpretacji rezultatu formalnego, a mianowicie równoważności zasady najmniejszego działania i zasad dynamiki Newtona.

Opis układu oparty na równaniu różniczkowym, wyrażającym drugą zasadę dynamiki, ma wyraźnie charakter deterministyczny, tzn. ewolucja układu przedstawia się jako łańcuch przyczyn i skutków. Przy zastosowaniu natomiast zasady najmniejszego działania ujawnia się, by użyć terminu filozoficznego, teleologiczny bądź finalistyczny charakter ewolucji, tzn. układ dąży do określonego celu, w tym przypadku do zminimalizowania wielkości zwanej działaniem. Tę drugą, teleologiczną interpretację uważa mój adwersarz za podejrzaną i w związku z tym sugeruje, że mechanika klasyczna jest „teorią niepełną”. Nie zgadzam się z takim poglądem. Obie interpretacje, deterministyczną i teleologiczną, uważam za całkowicie równoprawne.

Filozofowie od wieków toczą dysputę o prawach rządzących światem. Materialiści stoją zwykle na gruncie determinizmu, podczas gdy idealiści często optują za teleologią, choć cel inny niż minimalizowanie działania mają na myśli. Fizyka w odróżnieniu od filozofii dysponuje aparatem formalnym podsuniełym przez matematykę i wypracowaną metodologią badań doświadczalnych. Dzięki temu nie tylko stawia pytania, ale potrafi udzielać odpowiedzi. Pytania są zwykle dużo prostsze niż te rozważane przez filozofów, zamiast bytu czy nicości mamy układ punktów materialnych lub równie pochyłą, za to odpowiedzi bywają całkiem precyzyjne.

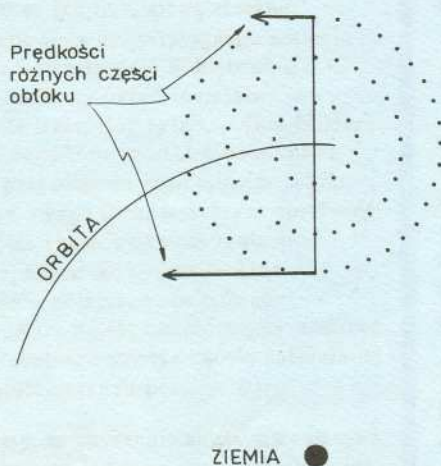
Zasada najmniejszego działania wydaje się nie mieć wiele wspólnego z zasadami dynamiki Newtona, a jednak oba podejścia są całkowicie równoważne. (Pomijam tu sztuczki matematyków, którzy zapewne bez kłopotu znajdą taką klasę *niefizycznych* ruchów, że dyskutowane podejścia nie będą równoważne). Jeśli już równoważność została udowodniona, to nie ma sensu twierdzić, że jedna interpretacja jest słuszna i prawidłowa, podczas gdy druga podejrzana bądź przypadkowa. Równoważność oznacza, według mnie, że różnica jest pozorna, że zespół pojęć, jakim operujemy, w tym przypadku determinizm i teleologia, jest nie zawsze adekwatny do opisu rzeczywistości. W fizyce z taką sytuacją spotykamy się wielokrotnie, szczególnie w mechanice kwantowej, gdzie mamy słynny dualizm korpuskularno-falowy, który sprawia, że obiekt kwantowy zachowuje się jednocześnie jak cząstka i jak fala. Używając znanych nam z życia codziennego pojęć fali i cząstki zrozumieć tego nie sposób, lecz Natura tym się nie przejmuje. I podobnie jest, jak sądzę, z determinizmem i teleologią, czyli w naszym przypadku z zasadami dynamiki Newtona i zasadą najmniejszego działania. Zauważmy, że zarówno w przypadku wspomnianego dualizmu, jak i dyskutowanej równoważności zasad ruchu, strona formalna zagadnień nie budzi kontrowersji.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

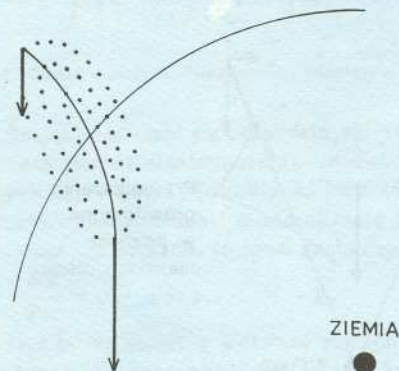
części obłoku nie będą równoległe, lecz nachylone ku sobie (są one wszystkie skierowane ku środkowi Ziemi). Będą więc miały małe składowe, skierowane ku środkowi obłoku, i boki obłoku będą powoli zbliżały się do siebie. Widać stąd, że różnice w natężeniu pola grawitacyjnego w sąsiednich punktach spowodują deformację obłoku. Będzie on rozciągany w kierunku środka Ziemi i ściskany w kierunkach prostopadłych, zmieniając kształt z kulistego na wrzecionowaty (rys. 1b).

Te różnice w natężeniu pola grawitacyjnego nazywane są **siłami pływowymi**. Przy ich obliczaniu odejmuje się wartości składowych siły grawitacyjnej po przeciwnych stronach badanego obiektu (w powyższym przykładzie był to spadający obłok). Wynik tego obliczenia nie może być zakodowany jako wektor, ponieważ składa się on z 9 liczb – jest to macierz; nie będziemy się dalej zajmowali szczegółami matematycznymi, ale trzeba wiedzieć, że mówimy tu o innym pojęciu niż zwyczajna siła wektorowa.

Obłok poruszający się po orbicie kołowej ulegnie podobnej deformacji (rys. 2a i 2b). Można łatwo obliczyć (np. z drugiego prawa Keplera), że obiekty dalsze od Ziemi poruszają się po orbicie z mniejszą prędkością niż obiekty bliższe. „Dolna” część obłoku będzie więc stale wyprzedzała część górną, i jeśli w chwili początkowej obłok będzie kulisty, to po pewnym czasie przybierze kształt podobny do banana (ponieważ różnica prędkości nie jest proporcjonalna do różnicy odległości od Ziemi, obiekty leżące początkowo na odcinku prostej utworzą później łuk krzywej).



Rys. 2a.
Obłok poruszający się po orbicie, początkowo kulisty...

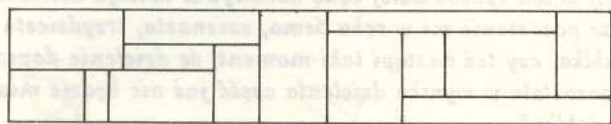


Rys. 2b.
... również zostanie zdeformowany wskutek różnych prędkości orbitalnych różnych części obłoku (spowodowanych różnicami w natężeniu pola grawitacyjnego).

A jednak elementarnie ...

W *Delcie* 9/1991 w niezależnym dodatku *EPSILON* zostało rozwiązane nieelementarnie (za pomocą całek podwójnych z funkcji zespolonej!) następujące zadanie.

Prostokąt P dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.



Redakcja *EPSILONA* zaznaczyła, że nie zna elementarnego rozwiązania. Co więcej, zadanie to było dyskutowane na pewnej międzynarodowej konferencji i tam też nikt nie znalazł elementarnego rozwiązania. Natomiast pan Marcin Mazur zwrócił nam uwagę, że elementarne rozwiązanie tego zadania znajduje się w zbiorze *Зарубежные математические олимпиады* (wyd. Moskwa 1987) – zadanie 16.25.

Poniżej przytaczamy szkic tego rozwiązania. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna jest nieskończoną szachownicą (pomalowaną na czarno-biało w standardowy sposób), przy czym kwadraciki, z których zbudowana jest ta szachownica, mają krawędzie długości $1/2$. Jeżeli teraz weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden bok o długości całkowitej, to, jak łatwo zauważyć, powierzchnia jego białej części będzie równa powierzchni jego części czarnej (dlaczego?). Jeżeli natomiast weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden z wierzchołków wspólny z wierzchołkiem jakiegoś kwadracika i jeżeli wiemy, że powierzchnia jego białej części jest taka sama jak powierzchnia jego części czarnej, to stąd już wynika, że jeden z boków ma długość całkowitą. Jeżeli bowiem żaden z boków nie ma długości całkowitej, to odcinając odpowiednie prostokąty, których co najmniej jeden z boków ma długość całkowitą (dla nich część biała ma takie samo pole jak część czarna), dojdziemy do takiej sytuacji, że zostanie nam mały prostokąt o obydwu bokach długości mniejszej niż 1, który ma jeden wierzchołek wspólny z wierzchołkiem kwadracika na szachownicy. Łatwo zauważyć, że pola białej i czarnej części tego prostokątka muszą być różne (dlaczego?). Teraz już możemy dokończyć nasze zadanie. Przypuśćmy, że prostokąt P jest sumą prostokątów P_1, P_2, \dots, P_n – tak jak w zadaniu. Usytuujmy naszą szachownicę tak, aby krawędzie tych prostokątów były równoległe do linii szachownicy i aby jeden z wierzchołków prostokąta P pokrywał się z wierzchołkiem kwadracika szachownicy. Wówczas, zgodnie z tym, co już udowodniliśmy, części białe i czarne prostokątów P_1, P_2, \dots, P_n mają równe powierzchnie. Wobec tego ta własność przysługuje też prostokątowi P , a stąd jedna z jego krawędzi ma długość całkowitą.

Zauważmy, że powyższy dowód uogólnia się na przypadek trójwymiarowy, gdzie prostokąty zastępujemy prostopadłościanami (proszę sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenie).

Piotr HAJŁASZ

Na orbicie eliptycznej deformacja obłoku będzie kombinacją opisanych tu efektów.

W tym miejscu Czytelnik wie już wystarczająco dużo, aby zrozumieć, jak powstają przyplwy na Ziemi i na innych ciałach niebieskich.

3. Przyplwy na Ziemi.

Mechanizm przyplwów oceanicznych na Ziemi jest skomplikowany, ponieważ Ziemia jest dość mocno związana swoim własnym polem grawitacyjnym (nie jest obłokiem swobodnie poruszających się obiektów), a ponadto skorupa ziemska jest ciałem stałym o dużej sztywności. Różne części Ziemi nie poruszają się więc niezależnie w polu grawitacyjnym Słońca. Przedstawione powyżej rozumowanie pozwala jednak na jakościowe zrozumienie tego procesu.

Będąc ciałem prawie sztywnym cała Ziemia jest przymuszana do ruchu po orbicie z tą samą prędkością. Jednakże, część Ziemi znajdująca się bliżej Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się szybciej niż środek Ziemi (z drugiego prawa Keplera) – porusza się więc z prędkością mniejszą od jej właściwej prędkości orbitalnej. Powoduje to nadwyżkę siły ciężenia nad siłą odśrodkową – na tę część Ziemi działa siła odciągająca ją ku Słońcu, od środka Ziemi. Część Ziemi znajdująca się dalej od Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się po orbicie wolniej niż środek Ziemi, jest więc przymuszana do ruchu „zbyt szybkiego”. To z kolei wywołuje nadwyżkę siły odśrodkowej nad siłą ciężenia – na tę część Ziemi działa więc siła odciągająca ją od Słońca, znów od środka Ziemi.

Jedyną częścią powierzchni Ziemi, która może w widoczny sposób poddać się tym siłom, są masy wody w oceanach. Wznoszą się one ku Słońcu i w dal od Słońca, wysokość wzniesienia jest ograniczana polem grawitacyjnym Ziemi. Gdyby Ziemia obracała się synchronicznie, zwrócona stale tą samą stroną ku Słońcu, owe dwa wzniesienia na powierzchni oceanów stałyby nieruchomo stale w tych samych miejscach. Ponieważ Ziemia obraca się niesynchronicznie, wzniesienia przyplwów, znajdujące się zawsze na linii łączącej środka Słońca i Ziemi, wędrują po powierzchni Ziemi powodując obserwowalne efekty na wybrzeżach.

Dla uproszczenia mówiliśmy tu o przyplwach spowodowanych przez Słońce. W rzeczywistości na Ziemię działa także przyciąganie grawitacyjne Księżyca. Ponieważ Księżyc jest znacznie bliżej, niejednorodność jego pola grawitacyjnego

(zbieżność linii sił) jest większa niż w przypadku Słońca i przypływy spowodowane przez Księżyc są wyższe. Na otwartym oceanie różnice poziomu wody spowodowane przez Słońce wynoszą 35 cm, różnice poziomu spowodowane przez Księżyc wynoszą 65 cm. Te dwie pary fal przypływowych obiegają Ziemię z różnymi prędkościami (słoneczne w 24 godziny, Księżycowe nieco dłużej – podczas obrotu Ziemi Księżyc przemieszcza się w kierunku obrotu). Dwa razy w ciągu miesiąca synodycznego (podczas nowiu i pełni) fale przypływów słonecznych i księżycowych pokrywają się i osiągają maksymalną wysokość około 1 metra. W pozostałych okresach w ciągu doby następują po cztery mniejsze przypływy i odpływy, oddzielone zmieniającymi się odstępami czasu.

Fale przypływu zalewające wybrzeża oceanów osiągają wysokości znacznie przekraczające 1 metr. Dzieje się tak wtedy, gdy nadbiegająca fala napotyka dno morskie wznoszące się łagodnie w kierunku jej ruchu albo zatokę lekko wężącą się w kierunku ruchu. W zatokach na francuskim brzegu kanału La Manche wysokość fali przypływu sięga 10 metrów, zaś najwyższe na świecie przypływy – 16 metrów – notowane są w zatoce Bay of Fundy w południowo-wschodniej Kanadzie.

Zauważmy, że różnice poziomu morza mniejsze niż 1 metr przy średnicy Ziemi, wynoszącej prawie 13 000 km, są bardzo małe. Pola grawitacyjne Słońca i Księżyca są więc z dobrym przybliżeniem jednorodne na całej Ziemi i są całkiem dokładnie znoszone przez przyspieszenia orbitalne Ziemi. Podobnie, pola grawitacyjne naszej Galaktyki i innych galaktyk są znoszone przez siły bezwładności spowodowane ruchem Słońca w Galaktyce i ruchem Galaktyki w Lokalnej Grupie galaktyk. Dlatego układ odniesienia związany ze środkiem Ziemi może być dla wielu celów uważany za inercjalny.

4. Skutki sił pływowych na innych ciałach w Układzie Słonecznym.

W skorupie Ziemi działanie sił pływowych nie daje się zaobserwować, ponieważ na Ziemi siły te są, jak wykazano powyżej, bardzo małe. Można sobie jednak łatwo wyobrazić, że większe siły pływowe, powstające w bardziej niejednorodnym polu grawitacyjnym (np. blisko Słońca albo dużej planety), mogą wznosić garby podobne do przypływów oceanu także w stałych powierzchniach planet lub księżyców. Zdarza się to rzeczywiście w Układzie Słonecznym.

Jabłko Demokryta

Kazimierz MIKULSKI

Wśród wielu anegdot i opowieści o starożytnych filozofach jest też i ta o jabłku Demokryta. Głosi ona, że siedząc pewnego razu na kamieniu nad brzegiem morza i trzymając w dłoni jabłko, Demokryt tak rozmyślał:

Jeżeli to jabłko przetnę na połowę, otrzymam połówkę jabłka. Jeżeli następnie tę połówkę przetnę na dwie części, otrzymam ćwiartkę jabłka. Jeżeli w ten sposób dalej będę dokonywał takiego dzielenia, to czy zawsze pozostanie mi w ręku ósma, szesnasta, trzydziesta druga itd. część jabłka, czy też nastąpi taki moment, że dzielenie doprowadzi do tego, iż pozostała w wyniku dzielenia część już nie będzie miała właściwości jabłka?

Filozof doszedł do wniosku, że granica owych podziałów istnieje. Swoje spostrzeżenia i wnioski wyłożył w dziele pt. *Mały diakosmos*, a niepodzielną część nazwał „atomem”.

Ilu cię potrzeba, by zamiast jabłka trzymać w ręku atom? Demokryt nie był w stanie odpowiedzieć na to pytanie. Aby to zrobić, musiałby znać rozmiary atomu, a pierwsze informacje na ten temat pojawiły się przeszło dwa tysiące lat po śmierci genialnego Greka.

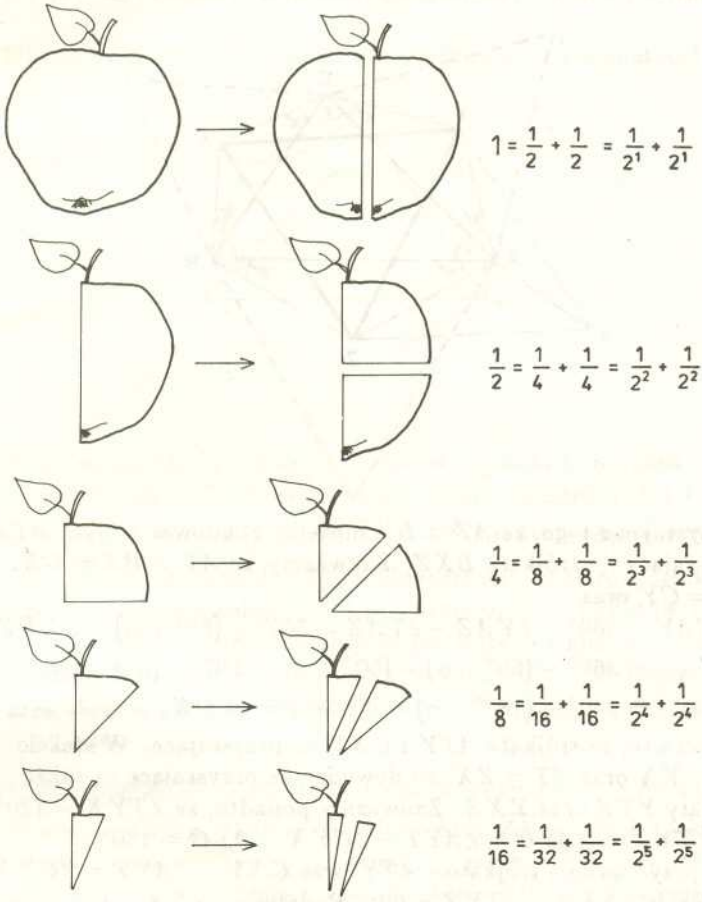
W 1742 r. Michał Wasylewicz Łomonosow (1711 – 1765) zauważył, że jubilerzy rozwałkują złoto do grubości jednej dziesięciotysięcznej części centymetra (10^{-4} cm), a więc atomy nie mogą być większe. W 1773 r. Benjamin Franklin (1706 – 1790) wykonał już specjalne doświadczenie mające na celu pomiar rozmiarów atomu. Wylał on na powierzchnię wody stawu w Clapham Common łyżkę oleju o objętości około 4 cm^3 i zmierzył powierzchnię powstającej plamy – wynosiła ona około 0,2 ha, czyli $2 \cdot 10^7 \text{ cm}^2$. Dzieląc objętość przez powierzchnię, Franklin otrzymał liczbę $2 \cdot 10^{-7}$ cm wyznaczającą górną granicę na średnicę „atomu” (dziś powiedzielibyśmy – cząsteczki) oleju.

Doświadczenia z błonkami olejowymi były powtarzane i w późniejszych latach. W swoich rozległych pracach badawczych Michael Faraday (1791 – 1867) wykonał ze złota warstwy o grubości rzędu 10^{-6} cm, a na szkle otrzymał przezroczyste warstewki, wręcz błonki o grubości 10^{-7} cm. Lord John William Strutt Rayleigh (1842 – 1919) otrzymał błonki o grubości 16 Å ($1 \text{ Å} = 10^{-8}$ cm). Natomiast w 1890 roku Wilhelmowi Conradowi Roentgenowi (1845 – 1923) udało się wytworzyć błonki olejowe o grubości 5 Å, ale jeszcze wcześniej, bo w 1805 roku, Thomas Young (1773 – 1829) badając zjawisko kapilarności oraz napięcia powierzchniowego cieczy wyliczył, że rozmiary badanych atomów są rzędu 10^{-8} cm.

Zupełnie odmienny sposób oszacowania wielkości fizycznych związanych z atomem (w tym i jego rozmiarów) podał w 1865 roku Józef Loschmidt (1821 – 1895). Stwierdził on, wykorzystując teorię molekularno-kinetyczną, która zakładała budowę gazów z poruszających się molekuł, że średnice atomów wynoszą 10^{-8} cm i są prawie jednakowe dla wszystkich znanych atomów.

Dalsze badania nie przyniosły już zasadniczych zmian w obrazie nakreślonym przez Loschmita, choć, oczywiście, precyzja pomiarów rosła z upływem czasu.

Aby odpowiedzieć na postawione wcześniej pytanie o liczbę podziałów jabłka, której musiałby dokonać Demokryt, możemy z powodzeniem przyjąć, że średnica atomu wynosi 10^{-8} cm. Załóżmy, że Demokryt trzymał jabłko będące w przybliżeniu kulą o średnicy d dziesięć centymetrów, a więc o objętości $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \approx 500 \text{ cm}^3$. Przy każdym podziale jabłka objętość ta zmniejsza się o połowę (rysunek). Po n -tym dzieleniu objętość trzymanej części wynosi więc $V_n = \frac{V}{2^n}$, przy czym proces dzielenia możemy kontynuować co najwyżej do momentu, gdy V_n jest równe objętości atomu $V_a = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$, gdzie $D = 10^{-8}$ cm. Otrzymujemy stąd $2^n \approx \left(\frac{d}{D}\right)^3$, czyli $n \approx 90$. Liczba ta jest zaskakująco mała.



Rysunek przedstawia podział jabłka Demokryta. A na ile części Ty, Czytelniku, możesz podzielić jabłko, ile najwięcej wykonasz cięć? Spróbuj.

Na zakończenie dodajmy, że z poglądami Demokryta (znanymi z poematu autorstwa Titusa Lukrecjusza Carusa (99 – 55 p.n.e.) pt. *O naturze wszechrzeczy*), żyjącego w latach około 460 – 370 p.n.e., w jońskiej kolonii Abderze na trackim wybrzeżu Morza Śródziemnego, nie zgadzał się działający niewiele później Arystoteles (384 – 322 p.n.e.), który uważał, że jabłko można dzielić bez końca. Zdanie Arystotelesa zwyciężyło i przez blisko dwa tysiące lat miało w nauce moc obowiązującą. A jednak Demokryt, uważany powszechnie za twórcę pojęcia atomu, nie był w swych poglądach zupełnie osamotniony. Historia wspomina jego nauczyciela, Leukippa z Miletu, oraz czasami fenickiego uczonego, Moscha z Sydonu, a także starochińskiego filozofa Kanadę (samo słowo „Kanada” można tłumaczyć jako „pożeracz atomów”).

Fala przyływu biegnąca po powierzchni ciała stałego wykonuje pracę przy odkształceniu tej powierzchni. Źródłem energii do wykonania tej pracy jest ruch obrotowy ciała (planety lub księżyca). Energia ruchu obrotowego jakiegokolwiek ciała stałego w silnie niejednorodnym polu grawitacyjnym zmniejsza się więc stale dotąd, aż fale przyływu przestaną wędrować po jego powierzchni. Innymi słowy, księżyc lub planeta doświadczająca takich przyływów zwolni swój ruch obrotowy tak, że w końcu będzie zwrócona stale tą samą stroną w kierunku źródła pola grawitacyjnego. Tak właśnie stało się z Księżycem, który jest zwrócony ku Ziemi stale tą samą stroną, i z galileuszowymi satelitami Jowisza.

Można zapytać, dlaczego Księżyc nie zmusił Ziemi do obrotu synchronicznego, mimo że Ziemia zmusiła do tego Księżyc. Aby to wyjaśnić, napiszmy wzór na różnicę przyspieszeń grawitacyjnych wywołaną przez Ziemię po przeciwnych stronach Księżyca:

$$\Delta g_K = GM_Z \left(\frac{1}{(d - r_K)^2} - \frac{1}{(d + r_K)^2} \right) = \frac{4GM_Z d r_K}{(d^2 - r_K^2)^2}$$

gdzie M_Z jest masą Ziemi, d – odległością od środka Ziemi do środka Księżyca, r_K – promieniem Księżyca. Wzór na różnicę przyspieszeń grawitacyjnych po przeciwnych stronach Ziemi wywołaną przez Księżyc jest następujący:

$$\Delta g_Z = GM_K \left(\frac{1}{(d - r_Z)^2} - \frac{1}{(d + r_Z)^2} \right) = \frac{4GM_K d r_Z}{(d^2 - r_Z^2)^2}$$

gdzie M_K jest masą Księżyca, zaś r_Z – promieniem Ziemi. Stąd:

$$\frac{\Delta g_K}{\Delta g_Z} = \frac{M_Z}{M_K} \cdot \frac{r_K}{r_Z} \cdot \frac{(d^2 - r_Z^2)^2}{(d^2 - r_K^2)^2} = \frac{M_Z}{M_K} \cdot \frac{r_K}{r_Z} \cdot \frac{(1 - r_Z^2/d^2)^2}{(1 - r_K^2/d^2)^2}$$

Ostatni czynnik jest z dobrym przybliżeniem równy 1 ($r_Z/d \approx \frac{1}{60}$), $M_Z/M_K \approx 81$, $r_K/r_Z \approx \frac{2}{7}$. Zatem:

$$\frac{\Delta g_K}{\Delta g_Z} = 23,$$

czyli siły pływowe wywoływane na Księżycu przez Ziemię są 23 razy większe niż siły pływowe wywoływane na Ziemi przez Księżyc. Ponadto, własne pole grawitacyjne Księżyca na jego powierzchni jest około 6 razy słabsze od ziemskiego pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi, Księżyc tłumiał więc fale przyływowe znacznie mniej skutecznie niż Ziemia.

Właśnie dlatego Ziemia nie została jeszcze zmuszona do obrotu synchronicznego z Księżycem. Warto jednak wiedzieć, że istnieją geologiczne dowody na to, że ruch obrotowy Ziemi jest spowalniany.

W muzeum historii naturalnej Smithsonian Institution w Waszyngtonie znajduje się odłamek dawnej rafy koralowej pochodzący sprzed kilkuset milionów lat. Rafa koralowa jest szkieletem żywego organizmu i, dopóki organizm żyje, stale rośnie. Geolodzy potrafią rozpoznać warstwy przyrostu dziennej rafy i po charakterystycznych, cyklicznie powtarzających się układach warstw dziennych rozpoznają przyrosty roczne. Okazuje się, że w czasach, gdy rafa z muzeum żyła, rok miał 390 dni. Nie są znane przyczyny, dla których mogłaby zmaleć długość roku na Ziemi (wiązałyby się to z przyspieszeniem ruchu orbitalnego, a więc zbliżeniem Ziemi do Słońca – tak wyraźna zmiana w ciągu kilkuset milionów lat nie byłaby możliwa do wytłumaczenia). Wniosek jest tylko jeden: Ziemia obraca się dziś wolniej, a za spowolnienie obrotu odpowiedzialne są przyplawy.

Sily pływowe mogą wywoływać też inne efektowne zjawiska. Jeśli są wystarczająco duże, mogą spowodować rozerwanie gwiazdy, planety lub księżycy na fragmenty. Możliwe, że ich działaniu zawdzięczają też istnienie pierścienie pyłowe wokół planet. Wyobraźmy sobie, że na orbicie wokół gwiazdy lub planety znalazł się obłok małych obiektów (podobny do tego, o którym już mówiliśmy), związany siłami grawitacyjnymi na tyle słabo, że własne pole grawitacyjne obłoku jest za małe dla powstrzymania rozciągającego działania sil pływowych. Wówczas, jak to już opisaliśmy, część obłoku bliższa ciału przyciągającemu będzie systematycznie wyprzedzać część zewnętrzną i po dostatecznie dużej liczbie obiegów wyprzedzi ją o całą orbitę. W tym momencie obłok zamieni się w zamknięty pierścień. Nie próbujemy tu wyjaśnić, jak powstaje początkowy obłok, ale wnioskiem z powyższych rozważań jest następujące stwierdzenie: dla układu wielu małych obiektów krążących po bliskich sobie orbitach naturalnym stanem końcowym jest zamknięty pierścień wokół ciała centralnego, nie zaś obłok o małych rozmiarach.

Przypuśćmy, że obrót księżycy jakiejś planety stał się już synchroniczny, ale jego orbita jest eliptyczna. Ze wzoru na Δg widać, że różnica sil grawitacyjnych po przeciwnych stronach księżycy jest

Zadanie Napoleona

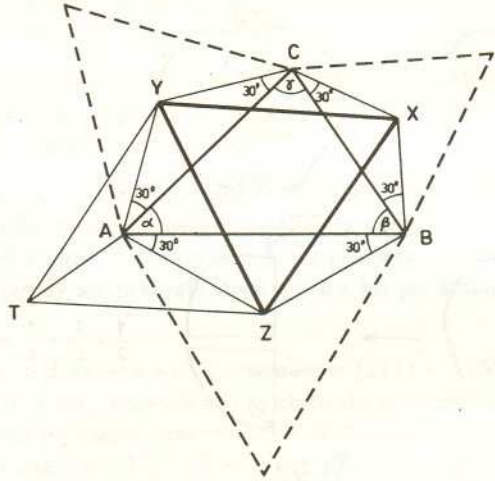
Edmund PUCZYŁOWSKI

Następujące zadanie pochodzi podobno od Napoleona.

Wykazać, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach danego trójkąta ostrokątnego, jest równoboczny.

Przedstawimy tu trzy rozwiązania tego zadania.

1. Dla szkół podstawowych (trzeba znać cechy przystawania trójkątów i umieć wyliczać proste zależności między kątami).

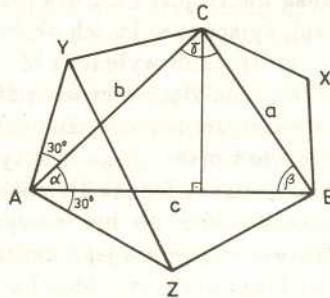


Korzystając z tego, że $AZ = BZ$ możemy zbudować trójkąt ATZ przystający do trójkąta BXZ . Zauważmy, że $AT = BX = CX$, $AY = CY$ oraz

$$\begin{aligned} \angle TAY &= 360^\circ - \angle YAZ - \angle TAZ = 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - \angle XBZ = \\ &= 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - (60^\circ + \beta) = 240^\circ - (\alpha + \beta) = \\ &= 240^\circ - (180^\circ - \gamma) = 60^\circ + \gamma = \angle YCX. \end{aligned}$$

Oznacza to, że trójkąty ATY i CXY są przystające. W efekcie $YT = YX$ oraz $ZT = ZX$, co dowodzi, że przystające są także trójkąty YTZ oraz YXZ . Zauważmy ponadto, że $\angle TYX = 120^\circ$ (bo $\angle TYX = \angle AYC + \angle AYT - \angle CYX$, $\angle AYC = 120^\circ$ i – z przystawania trójkątów ATY oraz CXY – $\angle AYT = \angle CYX$). W efekcie $\angle XYZ = \angle TYZ = 60^\circ$. Podobnie $\angle YZX = 60^\circ$, a więc trójkąt XYZ jest równoboczny.

2. Dla szkół średnich (trzeba coś wiedzieć o trygonometrii).



Zauważmy, że $AY = b/\sqrt{3}$, $AZ = c/\sqrt{3}$ oraz $\angle YAZ = \alpha + 60^\circ$.

Zatem, na podstawie twierdzenia cosinusów,

$$\begin{aligned}(YZ)^2 &= (1/3)(b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)) = \\ &= (1/3)(b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha).\end{aligned}$$

Analogicznie

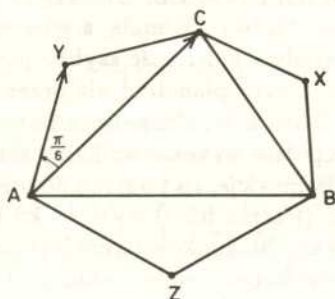
$$(XZ)^2 = (1/3)(a^2 + c^2 - ac \cos \beta + \sqrt{3}ac \sin \beta).$$

Teraz $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = 2S$, gdzie S jest polem trójkąta ABC , oraz (z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Zatem

$$\begin{aligned}(YZ)^2 &= (1/3)(a^2 + bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha) = \\ &= (1/3)(a^2 + c(c - a \cos \beta) + 2\sqrt{3}S) = \\ &= (1/3)(a^2 + c^2 - ac \cos \beta + \sqrt{3}ac \sin \beta) = (XZ)^2,\end{aligned}$$

czyli $YZ = XZ$. Podobnie dowodzimy, że $XY = XZ$.

3. Dla studentów (?) (trzeba coś wiedzieć o... kinematyce).



Załóżmy, że punkty A i B są umocowane, a punkt C porusza się w sposób „gładki”. Wraz z nim poruszają się punkty X i Y .

Ponieważ kąt między wektorami \vec{AC} i \vec{AY} jest stale równy $\pi/6$ oraz długość \vec{AY} jest stale równa $1/\sqrt{3}$ długości \vec{AC} , więc również kąt między wektorami (swobodnymi) prędkości v_Y i v_C punktów Y i C jest stale równy $\pi/6$ oraz długość pierwszego z nich jest równa $1/\sqrt{3}$ długości drugiego. Tak więc $v_Y = (1/\sqrt{3})O_{\pi/6}(v_C)$, gdzie $O_{\pi/6}$ oznacza obrót o kąt $\pi/6$. Podobnie $v_C = \sqrt{3}O_{\pi/6}(v_X)$. W efekcie $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$.

Wybermy teraz na płaszczyźnie układ współrzędnych o początku

w punkcie Z . Przypomnijmy, że jeśli wektor \vec{ZX} w chwili t jest równy $(x(t), y(t))$, to wektor prędkości v_X punktu X w chwili t jest równy $(x'(t), y'(t))$, gdzie – jak zwykle – $x'(t)$, $y'(t)$ oznaczają pochodne $x(t)$ i $y(t)$ względem t . Podobnie, jeśli w chwili t

$\vec{ZY} = (x_1(t), y_1(t))$, to w tej chwili $v_Y = (x_1'(t), y_1'(t))$. Jak widzieliśmy, $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$, więc $x_1'(t) = \cos(\pi/3) \cdot x'(t) - \sin(\pi/3) \cdot y'(t)$ oraz $y_1'(t) = \sin(\pi/3) \cdot x'(t) + \cos(\pi/3) \cdot y'(t)$.

Wynika stąd, że istnieją takie stałe a , b , że dla dowolnego t

$$x_1(t) = \cos(\pi/3) \cdot x(t) - \sin(\pi/3) \cdot y(t) + a \text{ oraz}$$

$$y_1(t) = \sin(\pi/3) \cdot x(t) + \cos(\pi/3) \cdot y(t) + b. \text{ Oznacza to, że}$$

w dowolnym momencie $\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX}) + \vec{R}$, gdzie \vec{R} jest

wektorem o współrzędnych a , b . Oczywiście, ruch punktu C możemy

dobrać tak, by w pewnym momencie t_0 , punkty A , B , C tworzyły

trójkąt równoboczny. W tym momencie również punkty X , Y , Z

będą tworzyły trójkąt równoboczny. Mamy więc $\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX})$,

co oznacza, że $\vec{R} = 0$. W efekcie dla dowolnego położenia punktu C ,

$\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX})$. Oznacza to, że $\angle YZX = \pi/3$. Podobnie

dowodzimy, że pozostałe kąty trójkąta XYZ są równe $\pi/3$.

większa, gdy księżyc znajduje się bliżej planety i mniejsza, gdy jest dalej. Fala przyływu na powierzchni księżycy (powierzchnia ta jest ciałem stałym!) będzie wtedy stać stale w tym samym miejscu powierzchni, ale będzie oscylować w górę i w dół. Energia, której kosztem powstają odkształcenia powierzchni księżycy, to energia ruchu obiegowego po orbicie. Wskutek utraty tej energii księżyc może w końcu spaść na swoją macierzystą planetę lub też jego orbita może stać się kołowa. Zanim do tego dojdzie, praca wykonywana przez oscylującą powierzchnię księżycy wytwarza energię ciepłą w jego wnętrzu i może je stopić. Ten mechanizm wytwarzania ciepła jest jedynym wyjaśnieniem, dlaczego na najbliższym z galileuszowych księżyców Jowisza, Io, znajdują się wulkany (erupcje wulkanów na Io zostały sfotografowane przez amerykańską sondę kosmiczną Voyager). Obiekt o dużej masie, jak Ziemia, mógł zachować wystarczająco dużo ciepła we wnętrzu od czasu swojego powstania, lub też nagrzać się od energii rozpadu pierwiastków promieniotwórczych. Mały obiekt, taki jak Io, wystygłby już dawno (podobnie jak np. nasz Księżyc), gdyby nie miał stale działającego źródła energii.

5. Siły pływowe są obiektywnym testem na istnienie pola grawitacyjnego.

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, przyspieszenie może znieść grawitację. Może też być użyte do symulowania grawitacji. Czytelnicy wiedzą pewnie, np. z powieści fantastyczno-naukowych, o „sztucznej grawitacji” w pojeździe kosmicznym, którą można wytworzyć przez obrót pojazdu wokół jego osi – siła odśrodkowa będzie wtedy „udawała” siłę grawitacyjną. Nie jest to żadna sztuczka psychologiczna, siły bezwładności i siły grawitacyjne naprawdę działają identycznie na wszystkie układy fizyczne i żadne przyrządy pomiarowe mierzące siłę w **jednym punkcie** nie potrafią rozróżnić tych dwóch sił.

Możliwość odróżnienia grawitacji od sił bezwładności stwarzają właśnie siły pływowe. Wyobraźmy sobie układ inercjalny, w którym nie działają siły grawitacyjne. Wyobraźmy sobie następnie, że w takim układzie zbieramy grupkę małych cząstek materii i następnie wypuszczamy wszystkie cząstki z jednakowymi prędkościami początkowymi (tzn. wszystkie prędkości mają równoległe kierunki oraz jednakowe zwroty i wartości).

liczbowe). Względne prędkości cząstek są więc początkowo równe zeru. Jeśli w układzie nie działają żadne siły, to prędkości względne pozostaną równe zeru stale – i obserwację tę uczyni każdy obserwator, niezależnie od tego, czy on sam spoczywa, czy porusza się ruchem jednostajnym lub przyspieszonym. Jeżeli jednak obserwowane cząstki znajdują się w polu grawitacyjnym, to wskutek działania sił pływowych pomiędzy prędkościami poszczególnych cząstek zaczną narastać różnice i po pewnym czasie prędkości różnych cząstek na ogół nie będą ani równe, ani równoległe – prędkości względne staną się różne od zera. Również tę obserwację zgodnie uczynią wszyscy możliwi obserwatorzy. Siły pływowe są więc obiektywnym, niezależnym od układu odniesienia dowodem istnienia pola grawitacyjnego. Wniosek ten jest ważny przy studiowaniu teorii grawitacji Einsteina, dla której rozróżnienie zjawisk względnych, obserwowalnych tylko w niektórych układach odniesienia, od zjawisk obiektywnych, wykrywalnych dla każdego obserwatora, jest podstawowym problemem.



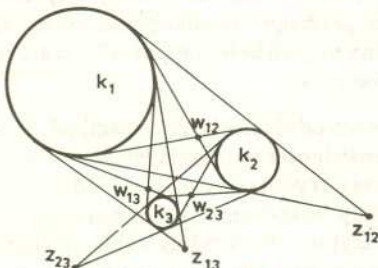
Rozwiązanie zadania M 616. Oznaczmy promień k_1 przez r_1 . Dowód pierwszej współliniowości: Jednokładność o środku z_{12} i skali $\frac{r_2}{r_1}$ przeprowadza k_1 na k_2 ,

a jednokładność o środku z_{23} i skali $\frac{r_3}{r_2}$ przeprowadza k_2 na k_3 . Złożenie tych jednokładności ma skalę $\frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_2} = \frac{r_3}{r_1} > 0$; przeprowadza k_1 na k_3 , ma więc środek z_{13} .

Jeśli złożeniem jednokładności J_1 i J_2 jest jednokładność J_3 (i żadna z nich nie jest identycznością), to środki tych jednokładności leżą na jednej prostej. Stąd pierwsza współliniowość.

Dowód drugiej współliniowości: Jednokładność o środku z_{12} i skali $\frac{r_2}{r_1}$ przeprowadza k_1 na k_2 ,

a jednokładność o środku w_{23} i skali $-\frac{r_3}{r_2}$ przeprowadza k_2 na k_3 . Złożenie tych jednokładności ma skalę $\frac{r_3}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_2}{r_2}\right) = -\frac{r_3}{r_1} < 0$; przeprowadza k_1 na k_3 , ma więc środek w_{13} – ciąg dalszy jak poprzednio.



Dowody pozostałych przypadków są analogiczne.

Jeśli Czytelnik nie zna twierdzenia wyróżnionego kursywą (z którego istotnie korzystaliśmy), to ma przed sobą dodatkowe, czwarte zadanie (ale już bez rozwiązania w tym numerze Delt) – udowodnić to twierdzenie.

Nie od dziś wiemy, że planetoidy różnią się nie tylko kształtem i rozmiarami, ale i składem chemicznym. W szczególności istnieje dość dobrze wyodrębniona klasa planetoid metalicznych zbudowanych niemal wyłącznie z żelaza i niklu. Podejrzewa się zresztą, że mogą to być szczątki jakiegoś większego obiektu. Większość planetoid krąży wokół Słońca, jak wiadomo, między orbitami Marsa i Jowisza, niektóre jednak mają orbity silnie odbiegające od kołowych i zbliżają się znacznie do orbity Ziemi. Stąd wzięły się pomysły, że ciała te można by w przyszłości wykorzystać jako „źródło bogactw naturalnych”.

Obserwacyjnie planetoidy tego typu wyróżniają się silniejszą emisją promieniowania długofalowego i dość wysoką ogólną zdolnością odbijania światła. W ten sposób stwierdzono, że metalicznymi planetoidami są np. 1986 DA i 1986 EB. Obiekty te w ogóle nie są łatwe do obserwowania. Są to ciała małe, a więc widoczne tylko z niedużej odległości, a wtedy z kolei dość szybko poruszają się na niebie. Rozmiary wspomnianych planetoid nie przekraczają 3 km. Niemniej jednak Steven Ostro z Jet Propulsion Laboratory w Kalifornii ze swoim zespołem wykonał unikalny eksperyment z planetoidą 1986 DA. Mianowicie, za pomocą 300-metrowego radioteleskopu w Arecibo (Puerto Rico) wysłano ku niej impulsy radiowe i odebrano ich echo. Stosunkowo duże natężenie odbitych impulsów potwierdziło wcześniejsze podejrzenia co do składu planetoidy.

Pojawiły się wtedy – jak to w Ameryce – praktyczne kalkulacje wartości tego bogactwa naturalnego. Gdyby planetoidy te miały istotnie taki właśnie skład chemiczny w całej objętości, to mogłyby być warte 10 bilionów dolarów. Taka byłaby wartość rynkowa – o naukowej w ogóle trudno coś sensownego powiedzieć.

Ale to jeszcze nic. Z badań geochemicznych wynika, że około 2,3 mln lat temu do Pacyfiku spadła planetoida – bo tak chyba należy ten obiekt nazwać. Dowodem na to ma być nie krater w dnie oceanicznym, lecz zaobserwowana nadwyżka irydu w osadach pochodzących z podejrzanego miejsca. Nawiasem mówiąc, jego współrzędne geograficzne są: długość 90° W i szerokość 57°S (trochę ponad 1000 km na zachód od Przylądka Horn). Wydobyte mianowicie z tamtych okolic osady denne zawierały szkliste ziarenka o zwiększonej zawartości irydu i złota. Irydu jest w skorupie ziemskiej jeden atom na bilion innych i każde odchylenie od tej normy ma prawo sugerować nawet pozaziemskie jego pochodzenie. Do takiego właśnie wniosku doszli badacze z University of California w Los Angeles: Frank Kyte, Lei Zhon i John Wasson. Nadwyżkę irydu zaobserwowali oni w wielu miejscach wokół punktu o podanych tu współrzędnych. Z tego oszacowali masę osobliwych osadów na 300 mln ton, a wreszcie rozmiary planetoidy na co najmniej 600 m (ceny nie podali). Byłby to największy obiekt, którego upadek na Ziemię można by uznać za „dowiedziony” (drugim byłby meteoryt, który wybił słynny krater w Arizonie – jego średnica oceniana jest na 50 do 100 m). Co ciekawsze, geologowie sugerują, że między 2,2 a 2,5 mln lat temu nastąpiła jakaś gwałtowna zmiana klimatu ziemskiego. Spadek takiego ciała mógł wywołać np. epokę lodowcową, której bezpośrednich śladów nie znamy.

Tomasz KWAST