Nie można zrozumieć znaczenia *Zasad* Newtona oraz reakcji, jaką to dzieło wywołało wśród ówczesnych uczonych, jeśli się nie prześledzi historii poglądów na temat ruchu, ciążenia i struktury świata.

System Arystotelesa, który utrzymywał się w przyrodoznawstwie przez niemal dwa tysiące lat, miał u swych podstaw dychotomiczny podział świata na dwie części, rządzone odmiennymi prawami. Oto streszczenie tego systemu.

Wszystkie substancje na Ziemi i w jej najbliższym otoczeniu, w tzw. *świecie podksiężycowym*, składają się z czterech elementów: ognia, powietrza, wody i ziemi, połączonych z sobą w różnych proporcjach. Ruchy ciał ziemskich dzielą się na *naturalne*, wynikające z samej natury substancji tych ciał, oraz *wymuszone* przez działanie zewnętrzne jakiegoś czynnika poruszającego. Pewne ciała przez swą naturę spadają w dół, dążąc do środka świata i te nazywają się ciałami *ciężkimi*. Inne ciała, nazywane *lekkimi*, przez swą naturę unoszą się do góry.

W przeciwieństwie do naturalnych ruchów spadania w dół i unoszenia się w górę ciał ziemskich, wśród ciał niebieskich występuje wieczny *ruch kołowy*. Wobec tego ciała te nie mogą składać się z czterech elementów ziemskich, lecz z czegoś innego; ten piąty element, eter (łac. *quinta essentia*) jest niezmienny, a wieczny ruch kołowy wynika też z jego natury.

Świat ma zatem strukturę geocentryczną, gdyż ciężka Ziemia, przez swą naturę znajduje się w jego środku (nawet, gdyby kiedyś tam nie była, to znalazłaby się tam już dawno dzięki swemu ruchowi naturalnemu). Wokół Ziemi mamy koncentryczne sfery trzech pozostałych elementów w porządku ich lekkości: najpierw woda, potem powietrze, wreszcie najwyżej – sfera ognia. Wyżej rozciąga się świat ciał niebieskich, obracające się wokół nieruchomej Ziemi koncentryczne sfery unoszące kolejno Księżyc, Merkurego, Wenus, Słońce, Marsa, Jowisza, Saturna; ostatnią jest sfera gwiazd stałych (*firmamentum*) będąca granicą kosmosu.

Prosty dowód niewymierności liczby π

Michał KRYCH

W 1761 roku niemiecki matematyk, Johann H. Lambert podał błędny dowód niewymierności π, natomiast poprawny podał w roku 1766. Jego dowód wykorzystywał tzw. ułamki łańcuchowe. Podobny dowód znalazł nieco później Francuz Andrien M. Legendre. Około stu lat potem Joseph Liouville sformułował i udowodnił twierdzenie, które pozwoliło wskazać konkretne liczby przestępne, tj. takie, które nie są pierwiastkami żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Po upływie niewielu lat Charles Hermite udowodnił, że jedna z „najważniejszych" liczb w matematyce, liczba e, jest przestępna, a wkrótce Ferdinand Lindemann wykazał, że znana od starożytności liczba π również jest przestępna. Tym samym okazało się, że kwadratura koła nie jest wykonalna. Natomiast w 1947 roku I. Niven, wzorując się na wspomnianym wyżej dowodzie Hermite'a, podał dowód niewymierności π wykorzystujący jedynie najprostsze własności całek, znane obecnie uczniom szkół średnich. Jego rozumowanie przytoczymy poniżej.

Załóżmy, że $\pi = \frac{p}{q}$, gdzie p oraz q oznaczają liczby naturalne. Niech

$$c_n = \frac{q^n}{n!}\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \,\mathrm{d}x .$$

Wykażemy, że
1. $\lim c_n = 0$,
2. $c_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej n,
3. c_n jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej n.

Oznaczać to będzie, że przyjęte założenie, iż $\pi = \frac{p}{q}$ prowadzi do sprzeczności, bo ciąg dodatnich liczb całkowitych nie może być zbieżny do liczby 0. Udowodnimy własności 1, 2 i 3 ciągu (c_n).

1. Jeśli $0 \le x \le \pi$, to $x(\pi - x) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ i $\sin x \ge 0$, zatem $\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \ge \int_0^\pi [x(\pi-x)]^n \sin x \,\mathrm{d}x \ge 0$. Stąd mamy $0 \le c_n \le \frac{\pi}{n!}\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej a, np. $a = \frac{q\pi^2}{4}$, jest $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, więc $\lim c_n = 0$, co kończy dowód własności 1.

2. Całkowana funkcja jest dodatnia wewnątrz przedziału $[0, \pi]$, więc całka z niej na tym przedziale jest dodatnia, zatem $c_n > 0$.

3. Ten fragment rozumowania jest najdłuższy. Niech w oznacza wielomian stopnia k. Pochodne funkcji w są więc równe 0 począwszy od $(k+1)$-szej, czyli $w^{(j)}(x) = 0$ dla $j \ge k+1$ i dowolnej liczby x. Zaczniemy od obliczenia całki nieoznaczonej $\int w(x)\sin x\,\mathrm{d}x$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy:

$$\int w(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -w(x)\cos x + \int w'(x)\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -w(x)\cos x + w'(x)\sin x - \int w''(x)\sin x\,\mathrm{d}x .$$

Sprowadziliśmy zatem problem do obliczenia całki $\int w''(x)\sin x\,dx$, a więc do takiego samego zadania, jak na początku, z tym jednak że udało się nam zmniejszyć o 2 stopień wielomianu, przez który wymnażamy sinus. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie i biorąc pod uwagę to, że pochodne wielomianu w począwszy od pochodnej $(k+1)$-szego rzędu zerują się, otrzymujemy wzór:

$$\int w(x)\sin x\,dx = \cos x[-w(x)+w''(x)-w^{(4)}(x)+\ldots]+$$
$$+\sin x[w'(x)-w^{(3)}(x)+W^{(5)}(x)-\ldots]$$

– przy czym sumy w nawiasach kwadratowych są skończone, bo od pewnego momentu ich wszystkie składniki są zerami.

Niech teraz $w(x)=[x(\pi-x)]^n$. Jest, oczywiście, $w(x)=w(\pi-x)$. Wobec tego $w^{(j)}(x)=(-1)^j w^{(j)}(\pi-x)$ dla $j=0,1,2\ldots$ Jest również $\sin 0=\sin\pi=0$ oraz $\cos 0=1$, $\cos\pi=-1$, skąd

$$\int_0^\pi w(x)\sin x\,dx =$$
$$=-1(-w(\pi)+w''(\pi)-w^{(4)}(\pi)+\ldots)-$$
$$-1(-w(0)+w''(0)-w^{(4)}(0)+\ldots)=$$
$$=2(w(0)-w''(0)+w^{(4)}(0)-\ldots).$$

Do stwierdzenia całkowitości liczb c_n wystarczy więc, by liczby $\frac{q^n}{n!}w(0)$, $\frac{q^n}{n!}w''(0)$, $\frac{q^n}{n!}w^{(4)}(0)\ldots$, były całkowite. Z dwumianu Newtona mamy

$$w^{(j)}(x)=\Big[\pi^n x^n-\binom{n}{1}\pi^{n-1}x^{n+1}+$$
$$+\binom{n}{2}\pi^{n-2}x^{n+2}-\binom{n}{3}\pi^{n-3}x^{n+3}+\ldots+(-1)^n x^{2n}\Big]^{(j)}.$$

Jeśli $j<n$, to każdy składnik sumy $w^{(j)}(x)$ zawiera zmienną x z dodatnim wykładnikiem, więc $w^{(j)}(0)=0$. Mamy $w^{(n)}(0)=n!\pi^n$, $w^{(n+1)}(0)=-\binom{n}{1}\pi^{n-1}(n+1)!$, $w^{(n+2)}(0)=\binom{n}{2}\pi^{n-2}(n+2)!\ldots$, $w^{(2n)}(0)=(-1)^n(2n)!$ Dla $j>2n$ $w^{(j)}(x)=0$. Jeśli więc $\pi=\frac{p}{q}$, to liczby $\frac{q^n}{n!}w^{(j)}(0)$ są całkowite dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j. To stwierdzenie kończy dowód.

Konkurs

Jak wynika z powyższego artykułu, prosty dowód niewymierności π wcale nie jest taki bardzo prosty i został wymyślony stosunkowo niedawno. W artykule jest też przypomniana pokrótce historia innych dowodów niewymierności π. W związku z tym ogłaszamy otwarty konkurs. Czekamy na elementarne (własnej produkcji) dowody niewymierności π. Jeśli nie będą one zbyt długie, to z chęcią je opublikujemy. A ponadto będzie to z pewnością dobra praca na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

Redakcja

Usuwając Ziemię z centrum wszechświata i czyniąc ją jedną z planet Kopernik burzył fundament całego systemu. Ale Kopernik zbyt głęboko tkwił w wielowiekowej tradycji, by mógł zrobić następne rewolucyjne kroki. Nie potrafił zrezygnować z idei, że jedynie orbity kołowe, jako najdoskonalsze, przystoją ciałom niebieskim; wskutek tego zmuszony był w swym heliostatycznym systemie świata zachować epicykle i deferenty.

Następny rewolucyjny krok uczynił Kepler. On pierwszy zerwał z tradycją „astronomii kinematycznej" stawiającej sobie za zadanie tylko opis ruchu ciał niebieskich i on pierwszy pytał o przyczyny: „A były głównie trzy problemy, których przyczyn, dlaczego jest tak, a nie inaczej, szukałem, a mianowicie liczba, wielkość i ruch sfer". Ale ruch kołowy jest dla Keplera nadal ruchem naturalnym w tym sensie, że nie wymaga siły przyciągającej, która by utrzymywała ciało w stałej odległości od środka.

Wielki Galileusz, który tak przyczynił się do rozwoju nauki o ruchu, nie zastanawiał się nad dynamiką układu planet i siłami działającymi w układzie Kopernika, którego był zwolennikiem i propagatorem. Nigdy nie zaakceptował odkrycia orbit eliptycznych przez Keplera, a także wyrażał zdziwienie, iż ten przypisywał przypływy morza wpływowi przyciągania Księżyca. Wymyślił natomiast własne, kompletne fałszywe wyjaśnienie przypływów, jako zjawiska dowodzącego ruchu obrotowego Ziemi.

U Kartezjusza znajdujemy pierwszą próbę, choć mało jeszcze spójną, utożsamienia fizyki ziemskiej i niebieskiej. W racjonalnej kosmologii Kartezjusza pojawia się po raz pierwszy „siła odśrodkowa", *conatus recedendi a centro* – skłonność ciał do oddalania się od środka – wobec czego potrzebny jest mechanizm temu przeciwdziałający i utrzymujący ciało na orbicie kołowej. Kartezjusz znalazł potrzebne wytłumaczenie w istnieniu wirów subtelnej materii wypełniającej cały wszechświat. To właśnie ciśnienie wywierane przez wir, którego środkiem jest Słońce, miało utrzymywać planety