

Dziwne działanie otworu o zmiennej średnicy

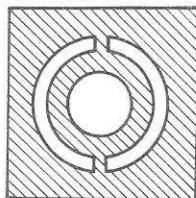
Juliusz DOMAŃSKI, Hanna OSICKA

W wielu szkołach znajduje się zestaw mikrofalowy z generatorem fal o długości około 3 cm. Proponujemy wykonanie niewielkiego uzupełnienia zestawu i przeprowadzenie interesującego doświadczenia na lekcji lub zajęciach koła fizycznego.

Mikrofalami nazywa się fale elektromagnetyczne o długości rzędu 1 cm.

Do wykonania elementów uzupełniających potrzebne będą 3 kawałki możliwie sztywnego kartonu o wymiarach około 35×35 cm.

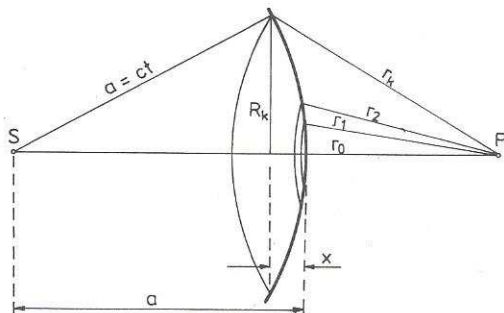
W pierwszym z nich wycinamy kołowy otwór o promieniu $R_1 = 5$ cm, w drugim o promieniu $R_2 = 7,1$ cm. W trzecim kołowy otwór o promieniu 5 cm i współśrodkowy z nim pierścień o promieniu wewnętrznym $R_3 = 8,7$ cm i zewnętrznym $R_4 = 10$ cm.



Karty oklejamy folią aluminiową (do pakowania żywności), ponieważ powinny być „nieprzezroczyste” dla fal elektromagnetycznych. Oczywiście, lepsze (i trwalsze) byłyby przesłony wykonane z cienkiej, aluminiowej blachy.

Przystępujemy teraz do wykonania doświadczenia. Wylot anteny tubowej generatora i diodę mikrofalową ustawiamy w odległości około 32–33 cm. Diodę łączymy z wejściem Y oscylografu (o czułości rzędu 50 mV/cm) lub (a nawet lepiej) z odpowiednio czułym miernikiem. Opis wykonania takiego miernika, przydatnego do wielu innych doświadczeń, podamy na końcu artykułu. Uruchamiamy przyrządy. Na ekranie oscylografu (przy częstotliwości podstawy czasu większej od modulującej generator) powinniśmy uzyskać dwie równoległe, poziome linie. Odległość między liniami jest miarą wielkości odbieranego przez diodę sygnału. W połowie odległości między generatorem a diodą ustawiamy pierwszą przesłonę. Wylot generatora, środek otworu przesłony i dioda powinny znaleźć się na linii prostej. Wielkość odbieranego sygnału wyraźnie wzrasta! Uwaga: być może będziemy musieli teraz dokonać pewnej korekty ustawienia przyrządów – nasze źródło fal nie jest źródłem punktowym. Próbujemy nieco zmienić położenie przesłony (lub diody), do uzyskania maksymalnego sygnału. Usuwamy przesłonę i wstawiamy drugą, z większym otworem. Odbierany sygnał maleje. Wygląda to dość dziwnie. Wykorzystujemy jeszcze trzecią przesłonę. Odbierany sygnał wzrasta niemal dwukrotnie!

A oto wyjaśnienie przebiegu doświadczenia. Rozważmy punktowe źródło S fali monochromatycznej, znajdujące się w ośrodku izotropowym. W dowolnej chwili czoło fali będzie mieć postać kuli o promieniu $a = ct$. Aby znaleźć amplitudę drgań w punkcie P , trzeba złożyć drgania wywołane falami ze wszystkich źródeł wtórnych na powierzchni falowej. W tym celu dzielimy czoło fali na obszary zwane strefami Fresnela.



Konstrukcja Fresnela: Czoło fali dzielimy na obszary (strefy) i traktujemy je jako niezależne, jednakowe źródła fal. Amplitudę fali w obserwowanym punkcie znajdujemy jako złożenie fal wytworzonych przez poszczególne strefy. Metoda daje dobre wyniki, jeśli tylko rozmiary otworów są większe niż długość fali.

O kilku otwartych problemach teorii liczb pierwszych

Władysław NARKIEWICZ

Już w szkole podstawowej stykamy się z liczbami pierwszymi. Określa się je jako liczby całkowite, większe od jedności, nie dające się przedstawić jako iloczyn liczb mniejszych. Takimi liczbami są np. liczby 2, 3, 5, 7, 65537, $2^{127} - 1$, czy też $2^{756839} - 1$. Ta ostatnia jest największą znaną obecnie liczbą pierwszą. Liczby pierwsze są cegiełkami, z których zbudowane są liczby naturalne – każda bowiem liczba naturalna większa od jedności daje się przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych i to tylko na jeden sposób.

Liczby pierwsze i ich tajemnicze własności od wieków fascynują matematyków. Po raz pierwszy pojawiają się w *Elementach* Euklidesa, gdzie znajdujemy dowód tego, iż jest ich nieskończenie wiele. Od tego czasu odkryto wiele interesujących faktów o liczbach pierwszych, ale mimo to pozostaje jeszcze do rozwiązania szereg problemów ich dotyczących. Kilka z nich omówimy poniżej.

Funkcja $\pi(x)$ i hipoteza Riemanna

Jeden z głównych problemów teorii liczb pierwszych dotyczy zachowania się funkcji $\pi(x)$, dającej ilość liczb pierwszych w przedziale $[2, x]$. Nietrudno sprawdzić, że na przykład $\pi(10) = 4$, $\pi(1000) = 168$, a przy pewnym wysiłku można otrzymać $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$. Analiza wzrostu funkcji $\pi(x)$ dla x aż do 3 000 000 skłoniła C.F. Gaussa do postawienia przypuszczenia, że jest ona dobrze przybliżana przez iloraz $x/\log x$. (Przez $\log x$ będziemy stale oznaczali logarytm naturalny liczby x .) W połowie XIX wieku P. Czebyszew wykazał, że iloraz

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

leży pomiędzy dwiema dodatnimi stałymi, a w 1896 roku J. Hadamard i C. de la Vallée-Poussin niezależnie udowodnili, że iloraz ten zmierza do jedności wraz ze wzrostem x . Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia o liczbach pierwszych* i zostało uznane za jedno ze szczytowych osiągnięć matematyki ubiegłego stulecia. Mówiono nawet, że jego autorzy uzyskali nieśmiertelność. To się prawie sprawdziło: Hadamard zmarł mając 98 lat, a de la Vallée-Poussin przeżył lat 96.

Można udowodnić, że różnica między funkcją $\pi(x)$ a $x/\log x$ jest mniejsza od $cx/\log^2 x$, gdzie c jest pewną dodatnią stałą, a przy tym tego oszacowania nie można polepszyć. Wynika stąd, że $x/\log x$ nie jest zbyt dobrym przybliżeniem dla funkcji $\pi(x)$. Znacznie lepsze przybliżenie daje funkcja $\text{li}(x)$, zwana *logarytmem całkowym*, a zdefiniowana wzorem

$$\text{li}(x) = a + \int_2^x \frac{dx}{\log x},$$

przy czym a jest pewną liczbą, której wartość nie jest tu istotna.

Okazuje się, że różnica

$$\Delta(x) \doteq |\pi(x) - \text{li}(x)|$$

jest przy każdym n naturalnym dla dostatecznie dużych x mniejsza niż $x/\log^n x$. Istnieje stare przypuszczenie, że oszacowanie to można znacznie poprawić, a mianowicie sądzi się, że dla każdej liczby $\alpha > 1/2$ mamy

$$(1) \quad \Delta(x) < x^\alpha,$$

o ile tylko x jest dostatecznie duże.

Wiadomo, że oszacowanie (1) jest konsekwencją tzw. *hipotezy Riemanna*, która dotyczy rozmieszczenia miejsc zerowych pewnej funkcji zmiennej zespolonej, mianowicie funkcji *zeta Riemanna*, która jest dla $x > 1$ określona wzorem

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

a którą można rozszerzyć do funkcji określonej na całej płaszczyźnie zespolonej. B. Riemann w 1859 roku wysunął przypuszczenie, że jeśli $0 < x < 1$ oraz $\zeta(x + iy) = 0$ przy pewnym rzeczywistym y , to $x = 1/2$. Przypuszczenie to nosi nazwę hipotezy Riemanna i mimo wielu prób pozostaje do dziś nie udowodnione.

Hipoteza Riemanna uchodzi za jeden z najtrudniejszych problemów współczesnej matematyki. D. Hilbert uważał ją za najważniejsze zagadnienie matematyczne. Jest w tym zapewne sporo przesady, jednakże konsekwencje udowodnienia tej hipotezy dla teorii liczb byłyby ogromne. Ujrzymy to przy omawianiu następnych problemów.

Różnice między liczbami pierwszymi

Jeśli się przyjrzymy odstępom między kolejnymi liczbami pierwszymi, to nie dostrzeżemy tam żadnej wyraźnej prawidłowości. Znajdziemy bowiem mnóstwo liczb pierwszych różniących się o 2, np. 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19,

Pierwszą strefę Fresnela ograniczają punkty powierzchni falowej, których odległość od punktu P jest równa $r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$, gdzie λ – długość fali. Druga strefa znajduje się między skrajem pierwszej strefy a punktami powierzchni falowej, których odległość od punktu P jest równa $r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2} = r_0 + \lambda$. Analogicznie określamy granice

kolejnych stref, ogólnie: $r_k = r_0 + k \frac{\lambda}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że promień R_k k -tej granicy między strefami wynosi

$$R_k^2 = \left(r_0 + \frac{k\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + x)^2 \approx kr_0\lambda - 2r_0x \quad \text{oraz}$$

$$R_k^2 = a^2 - (a - x)^2 \approx 2ax.$$

Przybliżenie jest dobre, jeśli x i λ są małe w porównaniu z a . Eliminując z tych równań x otrzymujemy

$$R_k^2 = k \frac{ar_0\lambda}{a + r_0}.$$

Obliczmy jeszcze sumę powierzchni pierwszych k stref:

$$S_k = \pi R_k^2 = \pi k \frac{ar_0\lambda}{a + r_0},$$

a zatem powierzchnia pojedynczej strefy

$$S = S_k - S_{k-1} = \frac{\pi ar_0\lambda}{a + r_0}.$$

Jak widać, powierzchnie stref Fresnela są w przybliżeniu jednakowe. Dlatego jednakowe powinny być także amplitudy drgań wzbudzonych w punkcie P przez fale biegnące od każdej strefy. Ponieważ każda następna strefa jest średnio o pół długości fali dalej od punktu P , fale dochodzące do punktu P różnią się w fazie o π .

Wypadkowa amplituda wywołana działaniem wszystkich stref w punkcie P wynosi $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$, co można zapisać w postaci

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots$$

Z pewnym przybliżeniem możemy przyjąć, że

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_3), \quad A_4 = \frac{1}{2}(A_3 + A_5) \quad \text{itd.}$$

Wobec tego, gdy rozpatrujemy dużą liczbę stref, możemy napisać

$A = \frac{1}{2}A_1$, pomijając działanie ostatniej strefy. Wynik zaskakujący: działanie wszystkich stref Fresnela daje amplitudę równą połowie amplitudy od pierwszej strefy!

Zastanówmy się, co się stanie, gdy na drodze między punktami S i P ustawimy ekran z otworem o zmiennej średnicy. Dopóki promień otworu jest mniejszy od promienia pierwszej strefy Fresnela, dopóty jego zwiększanie powoduje wzrost amplitudy w punkcie P . Amplituda drgań osiąga wartość maksymalną wówczas, gdy promień otworu jest równy promieniowi pierwszej strefy. Przy dalszym zwiększaniu promienia otworu amplituda maleje (fale biegnące od pierwszej i drugiej strefy mają w punkcie P przeciwne fazy) i osiąga wartość minimalną, gdy promień otworu jest równy promieniowi drugiej strefy. Przy dalszym zwiększaniu promienia otworu otrzymujemy kolejno wzrost i spadek amplitudy wypadkowej.

A może potrafilibyście wykonać przesłonę o zmiennej w sposób ciągle średnicy otworu, np. na zasadzie przesłony irysowej stosowanej w aparatach fotograficznych?

Z konstrukcji Fresnela wynika możliwość znacznego zwiększenia promieniowania w punkcie P . Jeżeli odległość przesłony od źródła jest duża, można przyjąć, że strefy Fresnela leżą w płaszczyźnie przesłony. Można więc na drodze mikrofal umieścić płytkę, na której we wszystkich miejscach, gdzie znajdują się strefy parzyste (lub nieparzyste), naniesione są koncentryczne pierścienie z nieprzezroczystego dla mikrofal materiału. Wówczas do punktu P dochodzić będą fale w zgodnych fazach i wystąpi interferencja konstruktywna.

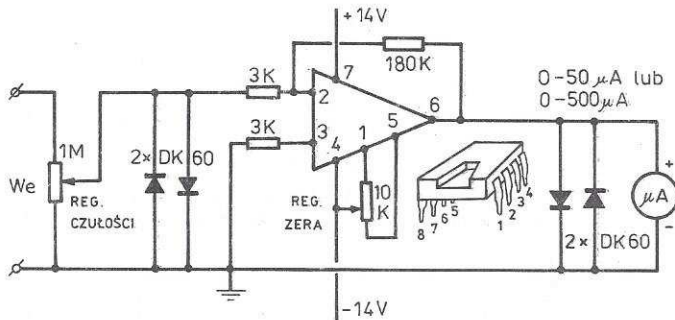
Płytkę strefową działa jak soczewka. Wyrażenie na promień pierwszej strefy $R_1^2 = \frac{ar_0\lambda}{a+r_0}$ możemy przekształcić do postaci:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{r_0} = \frac{\lambda}{R_1^2}$$

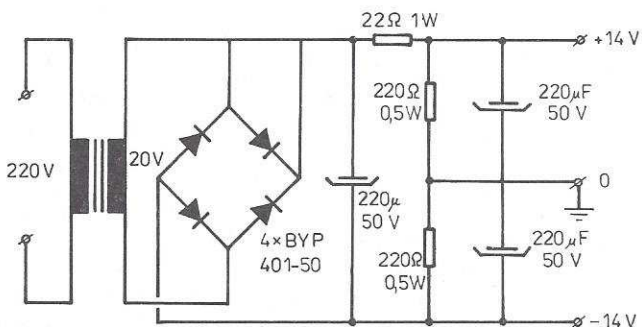
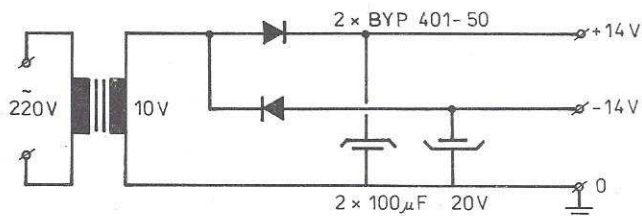
Jest to równanie soczewki o ogniskowej $f = \frac{R_1^2}{\lambda}$.

Sądzimy, że w tej chwili wynik doświadczenia jest w pełni zrozumiały. Dodajmy jeszcze, że jeśli w szkole nie ma generatora mikrofal, doświadczenie można wykonać z falami akustycznymi. Oczywiście, generator mikrofal zastępujemy generatorem akustycznym (o częstotliwości około 11 kHz) z niewielkim głośnikiem, a diodę mikrofonem z dowolnym wzmacniaczem.

I jeszcze obiecany schemat wzmacniacza do miernika.



Wykonamy go korzystając z łatwo dostępnego (i taniego) układu scalonego (wzmacniacz operacyjny) ULY 7741. Zasilanie, w najprostszym przypadku, za pomocą czterech baterii płaskich połączonych szeregowo (z wyprowadzonym „środkiem”). Plus i minus zasilania należy dołączyć do wzmacniacza jednocześnie. Można też wykonać zasilacz sieciowy wg jednego z rysunków przedstawionych poniżej. Powodzenia!



W przypadku, gdy Czytelnicy zechcą przeprowadzić stosowne doświadczenia, będziemy bardzo wdzięczni za listy z uwagami.

29 i 31 itd., a także ujrzymy odstępy dowolnie długie – np. wszystkie liczby z przedziału $[N! + 2, N! + N]$ są dla $N = 3, 4, 5, \dots$ złożone, ponieważ dla $k = 2, 3, \dots, N$ liczba $N! + k$ dzieli się przez k .

W 1845 roku J.L.F. Bertrand wysunął przypuszczenie (tzw. *postulat Bertranda*), że każdy przedział $(n, 2n]$ przy $n > 1$ zawiera przynajmniej jedną liczbę pierwszą i sprawdził to dla wszystkich $n < 3000000$. Dowód tego podał pięć lat później P. Czebyszew. Wkrótce potem pojawiło się pytanie, czy pomiędzy kolejnymi kwadratami liczb naturalnych musi leżeć liczba pierwsza. Odpowiedzi na nie nie znamy do dzisiaj. Pytanie to jest równoważne pytaniu, czy każdy przedział postaci $[x, x + 2\sqrt{x} + 1]$ zawiera liczbę pierwszą. W 1930 roku G. Hoheisel wykazał, że przedział $[x, x + x^\alpha]$, przy $\alpha = 1 - 1/33000$, zawiera dla dostatecznie dużego x przynajmniej jedną liczbę pierwszą. Dziś wiadomo, że w twierdzeniu Hoheisela można przyjąć za α dowolną liczbę większą od $6/11 = 0,5454\dots$ (S.T. Lou, Q. Yao, 1989). Przy założeniu słuszności hipotezy Riemanna nietrudno udowodnić, że za α można przyjąć dowolną liczbę większą od $1/2$.

Znacznie silniejszym przypuszczeniem jest *hipoteza Craméra*. Mówi ona, że jeśli p_n oznacza n -tą kolejną liczbę pierwszą, to istnieje taka stała C , że różnica $d_n = p_{n+1} - p_n$ nie przekracza $C \log^2 p_n$. Z hipotezy Riemanna wynika jedynie oszacowanie

$$d_n < C\sqrt{p_n} \log p_n,$$

udowodnione przez H. Craméra w 1921 roku.

Liczby pierwsze bliźniacze

Liczby pierwsze $p, p + 2$ nazywają się *liczbami pierwszymi bliźniaczymi*. Nie wiemy, czy takich liczb jest nieskończenie wiele, a największą znaną parę bliźniaczą tworzą liczby $1706595 \cdot 2^{11235} \pm 1$, znalezione w 1990 roku. W 1920 roku V. Brun zauważył, że liczby pierwsze bliźniacze nie mogą występować zbyt często. Udowodnił on mianowicie, że szereg utworzony z ich odwrotności jest zbieżny, podczas gdy już L. Euler wiedział, że szereg odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny.

Definiuje się także pierwsze *trojaczki* jako trójki liczb pierwszych $p, p + 2, p + 6$. (Zauważmy, że liczby $p, p + 2, p + 4$ mogą być pierwsze jedynie w przypadku $p = 3$, gdyż jedna z nich musi być podzielna przez 3.) O nich niewiele wiadomo. Pytanie o liczbę pierwszych bliźniaków

i trojaczków jest szczególnym przypadkiem następującego przypuszczenia

L.E. Dicksona:

Jeśli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami naturalnymi o tej własności, że iloczyn

$$A(x) = x(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

nie ma stałego dzielnika większego od 1, tj. nie ma takiej liczby $d > 1$, która dzieliłaby wszystkie wartości $A(1), A(2), A(3), \dots$, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że wszystkie liczby $p + a_1, p + a_2, \dots, p + a_n$ są liczbami pierwszymi.

W przypadku $n = 1, a_1 = 2$ prowadzi to do problemu bliźniaków, a w przypadku $n = 2, a_1 = 2, a_2 = 6$ do trojaczków.

Przed kilkunastu laty powiązano przypuszczenie Dicksona z innym starym przypuszczeniem, dotyczącym funkcji $\pi(x)$. Chodzi o to, czy dla wszystkich x, y naturalnych słuszna jest nierówność

$$(2) \quad \pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

z której wynika, że w żadnym przedziale o danej długości N nie może być więcej liczb pierwszych niż jest ich w przedziale $[1, N]$.

Okazało się mianowicie (D. Hensley, I. Richards, 1973), że to ostatnie przypuszczenie jest sprzeczne z przypuszczeniem Dicksona, a dokładniej, że ze słuszności przypuszczenia Dicksona wynika fałszywość nierówności (2) dla pewnych wartości x, y . Zatem jedno z tych przypuszczeń (a może i oba) musi być fałszywe. T. Vehka wykazał w 1979 roku, że jeśli hipoteza Dicksona jest prawdziwa, to istnieją przedziały o długości 11763, zawierające 1412 liczb pierwszych, podczas gdy przedział $[1, 11763]$ zawiera ich jedynie 1409.

Liczby pierwsze w postępach arytmetycznych

Nietrudno wykazać, że postęp arytmetyczny $3, 7, 11, 15, 19, \dots$, złożony z liczb naturalnych postaci $4k + 3$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Gdyby bowiem tak nie było i D byłoby iloczynem wszystkich liczb pierwszych tej postaci, to jedna z liczb $D + 2, D + 4$ dałaby się zapisać w postaci $4m + 3$. Ponieważ iloczyn dowolnej ilości liczb pierwszych postaci $4k + 1$ jest też tej postaci, zatem liczba $4m + 3$ musiałaby mieć dzielnik pierwszy p postaci $4k + 3$, a więc dzielnicy D , co jest niemożliwe, bo wówczas p dzieliłoby 2 lub 4.

Wynik ten jest szczególnym przypadkiem twierdzenia, udowodnionego w 1837 roku

Nierówności funkcyjne

Marek PYCIA

Autor jest zdobywcą złotego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1992 r.

Przedstawię wybrane metody elementarnego rozwiązywania nierówności funkcyjnych na przykładzie analizy nierówności związanych z moją pracą nagrodzoną na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

Będziemy rozważać funkcje zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych nieujemnych, które dla wszystkich s i t ze swojej dziedziny spełniają nierówność

$$(1) \quad \frac{1}{2}f(s) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}s + 2t\right).$$

W zależności od tego, jaka będzie dziedzina funkcji f , otrzymamy jakościowo inne rozwiązania. Przyjrzyjmy się kilku możliwościom.

1. $f: R \rightarrow [0, +\infty)$. Oczywiście, funkcja stale równa 0 spełnia (1). Wykażemy, że jest to jedyne rozwiązanie tej nierówności. Łatwo zauważyć (podstawiając w (1) $s = t = 0$), że $f(0) = 0$, a stąd dla dowolnego $t \in R$

$$f(t) \leq \frac{1}{2}f(-4t) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}(-4t) + 2t\right) = f(0) = 0.$$

(bo f nieujemna)

Stąd $f(t) = 0$ (gdyż $f(t) \geq 0$).

2. $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Wykażemy, że w tym przypadku jedynymi rozwiązaniami (1) są funkcje liniowe, tzn. funkcje postaci $f(t) = at$. Podobnie jak poprzednio otrzymujemy $f(0) = 0$. Składając nierówności (iterując) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f(s_1) + 2f(s_2) \right) + 2 \left(\frac{1}{2}f(t_1) + 2f(t_2) \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2f\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right) \leq \\ &\leq f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right)\right). \end{aligned}$$

Teraz podstawiając $s_1 = t_2 = 0, s_2 = s$ i $t_1 = t$ otrzymujemy

$$(2) \quad f(s) + f(t) \leq f(s + t),$$

czyli funkcja f jest tak zwaną funkcją nadaddytywną, a że wartości f są nieujemne, więc f jest niemalejąca. Podstawiając w nierówności (1) $s = 0$ uzyskujemy $2f(t) \leq f(2t)$. Natomiast podstawiając 0 w miejsce t i $2t$ w miejsce s uzyskujemy

$\frac{1}{2}f(2t) \leq f(t)$. Z obu tych nierówności mamy $2f(t) = f(2t)$. Stąd natomiast nietrudno jest wykazać indukcyjnie, że $f(2^m t) = 2^m f(t)$ dla każdego m całkowitego (m może być ujemne). Udowodnimy teraz, że dla każdego k naturalnego $f(kt) = kf(t)$. Istotnie.

Nietrudno jest wykazać indukcyjnie (korzystając z (2)), że $f(kt) \geq kf(t)$. Wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność przeciwna, tzn. $f(kt) \leq kf(t)$. Wykażemy to też za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ – oczywiście. Załóżmy teraz, że nierówność ta zachodzi dla liczb naturalnych mniejszych od k . Udowodnimy ją dla k . Otóż, jeżeli k jest parzyste, to

$$f(kt) = 2f\left(\frac{k}{2}t\right) \leq 2 \cdot \frac{k}{2}f(t) = kf(t).$$

(zał. ind.)

Jeżeli k jest nieparzyste, to

$$f(kt) \leq f((k+1)t) - f(t) = 2f\left(\frac{k+1}{2}t\right) - f(t) \leq$$

(wobec (2))
 $\leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)f(t) - f(t) = kf(t).$
 (zał. ind.)

Łącząc uzyskane równości otrzymujemy, że

$$(3) \quad f(k \cdot 2^m) = k \cdot 2^m f(1) \quad \text{dla } k \in N \text{ i } m \in Z.$$

Zbiór A liczb postaci $k \cdot 2^m$ jest gęsty w $(0, +\infty)$. Oznacza to, że dla dowolnej liczby dodatniej t znajdziemy takie dwa ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ze zbioru A (tzn. każdą z liczb a_n i b_n można przedstawić w postaci $k \cdot 2^m$), że

$$a_n \leq t \leq b_n \quad \text{oraz} \quad a_n \rightarrow t, \quad b_n \rightarrow t.$$

Skąd wobec (3) i monotoniczności f mamy

$$a_n f(1) = f(a_n) \leq f(t) \leq f(b_n) = b_n f(1).$$

Przechodząc do granicy mamy

$$tf(1) \leq f(t) \leq tf(1),$$

czyli $f(t) = tf(1)$, a więc funkcja f jest liniowa.

Zauważmy, że nie tylko postać dziedziny funkcji f , ale i postać zbioru wartości ma decydujące znaczenie dla rozwiązywalności nierówności (1). Widzieliśmy, że wśród funkcji $f: R \rightarrow [0, +\infty)$ tylko funkcja stale równa zeru jest rozwiązaniem. Stąd wśród funkcji $f: R \rightarrow (0, \infty)$ nierówność (1) rozwiązań nie ma. Natomiast gdybyśmy szukali rozwiązań wśród funkcji $f: R \rightarrow R$, to można udowodnić korzystając z pewnego twierdzenia G. Hamela istnienie rozwiązań, których wykres jest gęstym podzbiorem płaszczyzny R^2 (tzn., że w każdym otoczeniu dowolnego punktu płaszczyzny znajdują się punkty wykresu)! Co więcej, rozwiązania te są addytywne, to znaczy spełniają warunek $f(s+t) = f(s) + f(t)$. Warunek ten jest silniejszy niż nierówność (1).

Nierówność (1) to szczególny przypadek następującej nierówności funkcyjnej

$$(4) \quad af(s) + bf(t) \leq f(as + bt),$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi, a f jest, dla ustalenia uwagi, funkcją z $[0, +\infty)$ w $[0, +\infty)$.

Jeżeli $a + b = 1$, to nierówność (4) jest równoważna nierówności definiującej wklęsłość funkcji

$$\lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t) \leq f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in [0, 1]$$

(wynika to z pewnych twierdzeń Kuhna, Daróczego, Pálesa, i Bernsteina-Doetscha).

Gdy $a + b < 1$, pojawiają się rozwiązania nieciągłe (zgodnie z rezultatami K. Barona, J. Matkowskiego i K. Nikodema); podobnie jest, gdy $a + b \geq 1$. Przypadek $a < 1 < a + b$ (zbadany przez J. Matkowskiego) można sprowadzić do przypadku $a < 1 < b$ (iterowanie!), a rozwiązaniami tego ostatniego są wyłącznie funkcje liniowe. Dowód daje się poprowadzić dla niektórych wartości stałych a i b tak jak w punkcie 2. W ogólnym jednak przypadku trzeba sobie radzić trochę inaczej.

Wszystkie te wyniki są znane. Czym zatem zajmowałem się w pracy konkursowej? – innymi przypadkami nierówności

$$(5) \quad \alpha f(s) + \beta f(t) \leq f(as + bt),$$

gdzie $f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, α, β, a, b są stałymi dodatnimi oraz $a < 1 < b$. Przy tym założeniu udało się udowodnić, że jeżeli dla danych a, b, α, β nierówność (5) ma rozwiązanie niezerowe, to ma także rozwiązanie potęgowe. Pomogło to opisać klasy rozwiązań (5) (podobnie jest z nierównością $\alpha f(s) + \beta f(t) \geq f(as + bt)$, gdy $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$).

przez P.G. Lejeune Dirichleta, a głoszącego, że każdy postęp arytmetyczny, utworzony z liczb naturalnych, którego pierwszy wyraz jest względnie pierwszy z różnicą postępu, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Powstaje pytanie, jak duża może być najmniejsza liczba pierwsza leżąca w takim postępie. Z hipotezy Riemanna można wydedukować, że jeśli c jest dowolną liczbą większą od 2, oraz d jest dostatecznie duża, liczbą naturalną, to w każdym z postępów arytmetycznych

$$dk + a \quad (k = 1, 2, \dots; \\ 1 \leq a < d, \\ (a, d) = 1)$$

znajduje się liczba pierwsza nie przekraczająca d^c . W 1944 roku J.V. Linnik udowodnił (bez żadnych nieudowodnionych hipotez), że to twierdzenie jest słuszne dla pewnego, zresztą bardzo dużego, wykładnika c . Problemem zmniejszenia wielkości c w twierdzeniu Linnika zajmowało się wielu autorów. Przedostatni rekord należy do J.R. Chena i J.M. Liu, którzy w 1989 roku wykazali, że za c można przyjąć dowolną liczbę większą od 13,5, a zupełnie świeżo, bo w 1991 roku, Wang Wei zastąpił tu liczbę 13,5 przez 8.

Problem Goldbacha

W 1742 roku G. Goldbach zapytał, czy każda liczba parzysta, większa od 4, jest sumą dwóch liczb pierwszych nieparzystych i czy każda liczba nieparzysta, większa od 7, jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. Pytanie to nosi nazwę problemu Goldbacha, a pełnej odpowiedzi na nie dotąd nie znamy.

Pierwszy krok w kierunku rozwiązania tego problemu uczynili w 1922 roku G.H. Hardy i J.E. Littlewood, którzy przy użyciu pewnych hipotez, będących uogólnieniem hipotezy Riemanna (a dotąd nie udowodnionych) udowodnili, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. W 1937 roku I.M. Winogradow uzyskał tenże wynik, już bez użycia żadnych nieudowodnionych hipotez. Niedawno J.R. Chen i T.Z. Wang wykazali, że każda liczba nieparzysta większa od

$$e^{11,503}$$

jest sumą trzech liczb pierwszych. Niestety, liczba ta jest zbyt duża, by sprawdzić przypuszczenia Goldbacha dla wszystkich mniejszych liczb

nieparzystych. Sprawdzenia takiego dokonano jedynie dla liczb nie przekraczających $2 \cdot 10^{10}$ (A. Granville, J. van de Lune, H.J.J. te Riele, 1989).

W problemie Goldbacha dla liczb parzystych postęp był znacznie mniejszy. Dziś wiemy jedynie, że ilość liczb parzystych, mniejszych od x , które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, nie przekracza cx^δ , gdzie c jest pewną stałą i $\delta < 1$ (H.L. Montgomery, R.C. Vaughan, 1971), a nadto każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i liczby, która jest bądź pierwsza, bądź też jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych (J.R. Chen, 1973).

Wszystkie te wyniki uzyskano za pomocą trudnych środków analitycznych. Prostsze podejście zaproponował w 1930 roku L.G. Schnirelman, który za pomocą elementarnych metod udowodnił istnienie takiej liczby M , że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej M liczb pierwszych. Najmniejsza taka liczba M nosi nazwę *stałej Schnirelmana*, a przypuszczenie Goldbacha jest równoważne równości $M = 3$. Pierwsza wartość M była ogromna, ale obecnie udało się ją znacznie zmniejszyć, a rekord należy do H. Riesel i R.C. Vaughana, którzy w 1983 roku wykazali, że można przyjąć $M = 18$.



Rozwiązanie zadania M. 668. Niech S oznacza sumę naszego szeregu; w układzie siódmkowym mamy

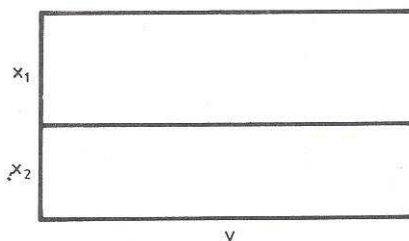
$$S = 0, 1001000010000001 \dots,$$

a dobrze wiadomo, że liczba o nieokresowym rozwinięciu (w jakimkolwiek układzie!) jest niewymierna.

Komentarz do artykułu Marka Pyci

W artykule Marka Pyci (str. 4), punkt 2, zostało udowodnione, że funkcja spełniająca podaną tam nierówność (1) (np. spełniają ją funkcje addytywne, tj. takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych x i y), mająca za dziedzinę i zbiór wartości zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, jest funkcją liniową, tj. postaci $f(t) = at$, dla stałego a . Wynika stąd od razu, że jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta o bokach x i y jest αxy , gdzie α jest stałą (zależną od wyboru jednostki długości).

Oznaczmy bowiem pole prostokąta przez $P(x, y)$.



Rys. 1

Z rysunku 1 wynika, że

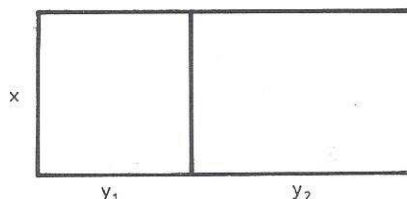
$$P(x_1 + x_2, y) = P(x_1, y) + P(x_2, y).$$

Ustalmy wartość y . Zgodnie z dowodem Marka Pyci funkcja $f_y(x) = P(x, y)$, jako spełniająca równość

$$f_y(x_1 + x_2) = f_y(x_1) + f_y(x_2),$$

jest postaci $f_y(x) = a(y) \cdot x$.

Spójrzmy teraz na rysunek 2.



Rys. 2

Mamy

$$P(x, y_1 + y_2) = P(x, y_1) + P(x, y_2).$$

A zatem

$$f_{y_1+y_2}(x) = f_{y_1}(x) + f_{y_2}(x).$$

Mamy więc dla dowolnego x

$$a(y_1 + y_2)x = a(y_1)x + a(y_2)x,$$

w szczególności, dla $x = 1$,

$$a(y_1 + y_2) = a(y_1) + a(y_2).$$

Znów odwołując się do tego samego dowodu otrzymujemy, że $a(y) = \alpha \cdot y$, gdzie α jest stałą.

Zatem $P(x, y) = f_y(x) = a(y)x = \alpha xy$, co chcieliśmy wykazać.

Inny dowód tego samego faktu można znaleźć w artykule Marka Kuczmy (co jeden, to Marek), w *Delcie* 1/1977 lub 7/1983.

Marek KORDOS