Stała Davenporta, czyli sztuka zadawania pytań

Marcin MAZUR

Powszechnie znany i bardzo prosty fakt, że spośród dowolnych n liczb całkowitych można wybrać pewną ilość tak, by ich suma była podzielna przez n, sięga czasów starożytnych (tak przynajmniej twierdzi Paul Erdős – jeden z wybitniejszych matematyków naszego stulecia). Jeśli Czytelnik nie zna przypadkiem tego stwierdzenia, proponuję przed przystąpieniem do dalszego czytania rozwiązać zadanie **M 670** w tym numerze *Delty.*

Bądźmy jednak bardziej dociekliwi i zapytajmy, czy spośród dowolnych n liczb naturalnych można wybrać pewną ilość tak, by ich suma dawała resztę r przy dzieleniu przez n, gdzie $0 \leq r < n$ jest dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Na tak postawione pytanie odpowiedź brzmi: nie. Weźmy bowiem $n = 4$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$ oraz $r = 1$. Wówczas żadna suma nie da reszty 1 (bo zawsze będzie parzysta). Widać jednak, jaka jest tego przyczyna: wszystkie a_i mają wspólny dzielnik z n. Załóżmy więc, że nasze pytanie ograniczymy do liczb a_i względnie pierwszych z n. Okazuje się, że w tym przypadku odpowiedź jest pozytywna. Zachodzi bowiem następujący

Lemat: *Załóżmy, że każda z liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_k$ jest względnie pierwsza z n, gdzie k i n ($k < n$) są liczbami naturalnymi. Utwórzmy wszelkie możliwe sumy tych liczb (bez powtórzeń). Wówczas otrzymane liczby dają co najmniej k różnych niezerowych reszt przy dzieleniu przez n.*

Aby udowodnić powyższy lemat, posłużymy się indukcją matematyczną ze względu na k. Otóż, dla $k = 1$ nie ma czego dowodzić: ponieważ a_1 jest względnie pierwsze z n, to daje niezerową resztę przy dzieleniu przez n. Załóżmy więc, że nasz lemat prawdziwy jest dla pewnego $k < n - 1$ i rozpatrzmy $k + 1$ liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_{k+1}$ względnie pierwszych z n. Na mocy założenia indukcyjnego rozpatrując wszelkie możliwe sumy różnych wyrazów ciągu spośród $a_1, \ldots, a_k$ otrzymamy liczby dające co najmniej k różnych niezerowych reszt $b_1, \ldots, b_k$ przy dzieleniu przez n. Niech i będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że $i \cdot a_{k+1}$ przy dzieleniu przez n daje resztę różną od $b_1, \ldots, b_k$. Wówczas $i \leq k + 1 < n$ (ponieważ a_{k+1} jest względnie pierwsze z n, więc liczby $a_{k+1}, 2a_{k+1}, \ldots, (k+1)a_{k+1}$ dają różne, niezerowe reszty przy dzieleniu przez n (dlaczego?)). Wobec tego $(i-1)a_{k+1}$ daje przy dzieleniu przez n resztę taką, jak suma pewnych liczb spośród $a_1, \ldots, a_k$ lub jest to liczba 0 (jeśli $i = 1$). W obu przypadkach $ia_{k+1} = (i-1)a_{k+1} + a_{k+1}$ daje z dzielenia przez n resztę b_{k+1} taką samą, jak pewna suma liczb spośród $a_1, \ldots, a_{k+1}$ i w dodatku reszta ta jest niezerowa i różna od $b_1, \ldots, b_k$. Tym samym lemat jest prawdziwy dla $k + 1$. Na mocy indukcji matematycznej dowód jest zakończony.

Wspomniany na wstępie fakt nic nie mówi o ilości liczb, których suma ma być podzielna przez n. Czy nie można (być może zakładając, że mamy więcej niż n liczb) zagwarantować, by istniało wśród nich dokładnie k liczb, których suma jest podzielna przez n? Jeśli $k < n$, to nie, bo spośród żadnej liczby jedynek nie można wybrać k o sumie podzielnej przez n. Podobnie rzecz ma się dla k niepodzielnych przez n. Jeśli jednak $k = n$, to okazuje się, że odpowiedź jest pozytywna. Jeśli bowiem mamy $n(n-1)+1$ liczb całkowitych, to pewne n z nich dają taką samą resztę przy dzieleniu przez n (dlaczego?), a więc ich suma jest podzielna przez n. Naturalne wydaje się więc zapytać, ile co najmniej potrzeba liczb całkowitych, by zawsze można było wybrać spośród nich n liczb o sumie podzielnej przez n. Szukana liczba jest z pewnością większa od $2(n-1)$, bo jeśli $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$ i $a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{2(n-1)} = 0$, to suma n dowolnych spośród nich nie dzieli się przez n. Okazuje się jednak, że prawdziwe jest następujące twierdzenie udowodnione w 1961 roku przez P. Erdősa, A. Ginzburga i A. Ziva:

Twierdzenie EGZ: *Spośród dowolnych $2n-1$ liczb całkowitych można wybrać n liczb, których suma dzieli się przez n.*

Teza twierdzenia dla $n = 100$ była przedmiotem jednego z zadań olimpiady matematycznej w ZSRR. Istnieje kilka dowodów twierdzenia EGZ (ponoć twierdzenie jest tym prawdziwsze, im więcej jest jego dowodów). Przytoczymy teraz jeden z nich. Przede wszystkim zredukujmy nasz problem do liczb pierwszych. W tym celu zauważmy, że jeśli twierdzenie EGZ jest prawdziwe dla liczb n_1, n_2, to jest również prawdziwe dla $n_1 \cdot n_2$. W samej rzeczy, rozpatrzmy $2n_1 \cdot n_2 - 1$ liczb całkowitych. Ponieważ twierdzenie EGZ zachodzi dla n_1, więc Czytelnik bez trudu uzasadni, że spośród tych liczb można tak wybrać $2n_2 - 1$ rozłącznych układów po n_1 liczb, że suma liczb każdego układu jest podzielna przez n_1 (ogólnie, spośród $s \cdot n_1 - 1$

Rozwiązanie zadania F 359.
Gęstość prądu elektronów płynących z powietrza do naelektryzowanego ekranu jest równa $j = \sigma E$, a więc prąd wynosi $I = \sigma E \cdot s$, gdzie s jest powierzchnią ekranu. Ładunek elektronów, a zatem i jonów pozostających w powietrzu wynosi $q = \sigma E \cdot s \cdot t$, gdzie t jest czasem pracy. Z drugiej strony ładunek, przy jakim odczuwamy dyskomfort, jest równy $q = 100iVe$, gdzie V jest objętością pokoju, a e ładunkiem elektronu. Ostatecznie $t = \dfrac{100iVe}{\sigma E s}$. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $t = 1,4$ godziny.

Rozwiązanie zadania F 360.
Z prawa Stefana-Boltzmanna wyznaczamy moc Słońca $P = \sigma T^4 \cdot S$, gdzie $S = 4\pi R^2$ jest powierzchnią Słońca, a $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ jest stałą Stefana-Boltzmanna. We wnętrzu Słońca musi zachodzić P/E cykli termojądrowych na sekundę. Liczba neutrin emitowanych w ciągu sekundy wynosi $N = \dfrac{2P}{E} = \dfrac{2\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}{E} \approx 2 \cdot 10^{38}\ \mathrm{s^{-1}}$. Przyjmując, że powierzchnia ciała jest rzędu $1\ \mathrm{m^2}$ otrzymujemy $\dfrac{N}{4\pi d^2} \approx 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}m^{-2}}$.

liczb całkowitych można wybrać $s-1$ takich układów (dlaczego?)). Niech b_i oznacza sumę i-tego układu. Wówczas liczby $\frac{b_i}{n_1}$ są całkowite i jest ich $2n_2-1$, a więc spośród nich można wybrać n_2 liczb o sumie podzielnej przez n_2 (bo twierdzenie EGZ zachodzi dla n_2). Niech będą to $\frac{b_{i_1}}{n_1},\ldots,\frac{b_{i_{n_2}}}{n_1}$. Zatem liczba $b_{i_1}+\ldots+b_{i_{n_2}}$ jest podzielna przez $n_1\cdot n_2$ i wobec określenia b_i jest ona sumą $n_1\cdot n_2$ liczb spośród rozpatrywanych, co dowodzi, że twierdzenie EGZ jest prawdziwe również dla $n_1\cdot n_2$. Udowodniony fakt i prosta indukcja pozwalają ograniczyć się w dalszym ciągu do liczb pierwszych (które, zgodnie z tradycją, oznaczamy literą p). Ponadto możemy założyć, że nasze $2p-1$ liczb spełnia nierówność

$$0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_{2p-1}<p \text{ (dlaczego?)}.$$

Niech $d_i=a_{p+i}-a_i$, dla $i=1,\ldots,p-1$. Zatem $0\le d_i<p$. Jeśli $d_i=0$ dla pewnego i, to $a_i=a_{i+1}=\ldots=a_{i+p}$, a stąd suma p liczb $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_{i+p-1}$ jest podzielna przez p. Jeśli wszystkie d_i są różne od 0, to stosując lemat dla $n=p$ i liczb $d_1,\ldots,d_{p-1}$ (które są względnie pierwsze z p) otrzymamy, że każda niezerowa reszta z dzielenia przez p, czyli dowolna liczba spośród $1,2,\ldots,p-1$, jest resztą z dzielenia przez p sumy pewnych liczb spośród d_i. Zatem albo $a_1+\ldots+a_p$ jest podzielna przez p, albo istnieją takie $i_1<i_2<i_j$, że $d_{i_1}+\ldots+d_{i_j}$ daje taką samą resztę przy dzieleniu przez p, jak $-(a_1+\ldots+a_p)$. Ale w drugim przypadku liczba $a_1+\ldots+a_p+d_{i_1}+\ldots+d_{i_j}$ jest podzielna przez p. Ponieważ liczba ta jest sumą p spośród liczb $a_1,\ldots,a_{2p-1}$ (dlaczego?; zauważmy, że $a_1+\ldots+a_p+d_1=a_2+\ldots+a_{p+1}$ itd.), więc w każdym przypadku w ciągu $a_1,\ldots,a_{2p-1}$ istnieje p wyrazów o sumie podzielnej przez p, co kończy dowód twierdzenia EGZ.

Okazuje się, że stosując nieco subtelniej powyższą metodę można wykazać (co pozostawiamy Czytelnikowi), że wśród $2n-2$ liczb całkowitych albo istnieje n, których suma jest podzielna przez n, albo można je tak podzielić na dwa podzbiory po $n-1$ liczb, że w każdym z tych podzbiorów wszystkie liczby dają takie same reszty przy dzieleniu przez n.

Następne pytanie, jakie postawimy, będzie starało się uogólnić uczynioną na wstępie obserwację jeszcze głębiej i doprowadzi do tytułowej stałej Davenporta – d. Niech więc dane będą liczby naturalne $n_1,\ldots,n_k$, wszystkie większe od 1. Będziemy rozpatrywać k-wyrazowe ciągi złożone z tych liczb. Pytanie, jakie sobie zadamy, brzmi następująco: Jaka jest najmniejsza liczba naturalna $d=d(n_1,\ldots,n_k)$, taka, że spośród dowolnych d takich ciągów k-wyrazowych można wybrać pewną ich liczbę tak, by suma i-tych wyrazów wybranych ciągów była podzielna przez n_i dla każdego $1\le i\le k$. Oczywiście, jeśli $k=1$, to stwierdzenie z początku artykułu daje $d(n_1)=n_1$ (bo nie może być $d(n_1)<n_1$ (dlaczego?)).

Okazuje się, że odpowiedź na tak zadane pytanie do dziś pozostaje otwartym problemem matematycznym. Przed przystąpieniem do dokładniejszego omówienia postawionego problemu wprowadzimy parę pojęć, które ułatwią nam rozważania. Wzbogacenie języka matematycznego niejednokrotnie przyczyniło się do rozwiązania problemu, którego przez długi czas nie udawało się ogarnąć, o czym Czytelnik studiujący matematykę z pewnością nieraz się przekonał. Przede wszystkim przez $\mathbf{n}$ będziemy oznaczali ciąg $(n_1,\ldots,n_k)$. Resztą z dzielenia ciągu liczb całkowitych $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_k)$ przez $\mathbf{n}$ będziemy nazywali taki ciąg $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_k)$, że r_i jest resztą z dzielenia a_i przez n_i dla każdego i $(1\le i\le k)$. Powiemy, że $\mathbf{n}$ dzieli $\mathbf{a}$, jeśli resztą $\mathbf{r}$ jest $(0,\ldots,0)$. Ponadto sumą dwóch ciągów $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ i $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ będziemy nazywali ciąg $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$, gdzie $c_i=a_i+b_i$ dla $i=1,\ldots,k$. Podobnie określamy różnicę. Możemy teraz nasz problem sformułować następująco: Jaka jest najmniejsza liczba $d=d(n_1,\ldots,n_k)=d(\mathbf{n})$, taka, że spośród dowolnych d ciągów k-wyrazowych można tak wybrać pewną ilość, by ich suma była podzielna przez $\mathbf{n}$.

Teraz możemy wykazać, że taka liczba d rzeczywiście istnieje, a nawet, że $d\le n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$. Istnieje bowiem $n_1\cdot\ldots\cdot n_k$ różnych reszt przy dzieleniu przez $\mathbf{n}$. Jeśli więc rozpatrzymy $n_1\cdot\ldots\cdot n_k$ ciągów $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k}$, to wśród sum $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\ldots$, $\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k}$ albo będzie ciąg dający resztę zero przy dzieleniu przez $\mathbf{n}$, albo pewne dwa będą dawały taką samą resztę; jeśli będą to $\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}+\ldots+\mathbf{a}_s$, wówczas ciąg $\mathbf{a}_{k+1}+\ldots+\mathbf{a}_s$ da resztę zero. W każdym przypadku otrzymamy sumę pewnych $\mathbf{a}_i$ podzielną przez $\mathbf{n}$. (Zauważmy, że dowód ten jest niemal identyczny z rozwiązaniem zadania **M 670**, w którym dowodzimy własności sformułowanej na początku artykułu.) Okazuje się jednak, że $d(n_1,\ldots,n_k)$ jest często dużo mniejsze od $n_1\cdot\ldots\cdot n_k$.

Żeby dokładniej przyjrzeć się naszemu problemowi, ograniczymy dopuszczalne ciągi $\mathbf{n}$. W tym celu rozpatrzmy dla liczby pierwszej p następującą operację T_p: jeśli $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$, to można napisać $n_i = p^{\alpha_i} \cdot n_i'$, gdzie $\alpha_i \geq 0$ i $p \nmid n_i'$. Niech σ będzie taką permutacją liczb $1, \dots, k$, że $\alpha_{\sigma(1)} \leq \alpha_{\sigma(2)} \leq \dots \leq \alpha_{\sigma(k)}$ i rozpatrzmy ciąg $n_i^* = p^{\alpha_{\sigma(i)}} n_i'$. Jeśli w ciągu tym wykreślić wyrazy równe 1, to otrzymany ciąg będzie właśnie wynikiem operacji T_p na ciągu $\mathbf{n}$. Okazuje się, że stałe d dla ciągów $\mathbf{n}$ i $T_p(\mathbf{n})$ są takie same. Poza tym, w wyniku skończonej liczby operacji T_{p_i} każdy ciąg $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ można doprowadzić do takiego ciągu $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s)$, że $m_1 | m_2 | \dots | m_s$ (tzn. m_i jest dzielnikiem liczby m_{i+1} dla $i = 1, \dots, p-1$) i ciąg $\mathbf{m}$ jest w ten sposób wyznaczony jednoznacznie (zainteresowany Czytelnik z pewnością bez trudu udowodni powyższe stwierdzenia). Będziemy taki ciąg $\mathbf{m}$ oznaczali przez $T(\mathbf{n})$. (Przykład: $(n_1, n_2, n_3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5. 3 \cdot 5) \xrightarrow{T_2} (3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) \xrightarrow{T_3} (2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5)$.)

Powyższe rozważania wykazują, że wystarczy zajmować się liczbami $d(n_1, \dots, n_k)$ dla $n_1 | n_2 | \dots | n_k$. Tak też będziemy w dalszym ciągu czynić.

Oszacujemy teraz liczbę $d(n_1, \dots, n_k)$ od dołu. Wykażemy mianowicie, że $d(n_1, \dots, n_k) \geq \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1$. Rozpatrzmy bowiem takie ciągi $\mathbf{a}_i$, że dokładnie $n_s - 1$ spośród nich ma postać $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, gdzie występuje dokładnie jedna jedynka na s-tym miejscu. Suma dowolnych spośród tych ciągów nie dzieli się przez $\mathbf{n}$ (dlaczego?).

Oczywiście, oszacowanie nasze jest prawdziwe dla dowolnego ciągu $\mathbf{n}$ (bez założenia, że $n_1 | n_2 | \dots | n_k$). Łatwo jednak wykazać, że liczba szacująca jest dla ciągu $T(\mathbf{n})$ nie mniejsza niż dla $\mathbf{n}$. Dla $n_1 | n_2 | \dots | n_k$ oznaczmy $D = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1$. Przez pewien czas przypuszczano, że $d = D$. Tak jest rzeczywiście, jeśli $k = 2$, albo jeśli wszystkie n_i są potęgami tej samej liczby pierwszej. Okazało się jednak, że na ogół $d > D$. Pierwszy przykład otrzymano rozpatrując $\mathbf{n} = (2, 2, 2, 2, 6)$. Otóż, w tym przypadku $D = 10$, natomiast $d \geq 11$.

Zauważmy, że równość $d = D$ dla $k = 2$ implikuje w szczególności twierdzenie EGZ. W rzeczy samej, jeśli $\mathbf{n} = (n, n)$ i weźmiemy $2n - 1$ ciągów $\mathbf{a}_i = (a_i, 1)$, to suma pewnych z nich jest podzielna przez n. Ale ich liczba musi być w takim razie równa n, bo suma drugich współrzędnych ma być wielokrotnością n. A stąd spośród liczb $a_1, \dots, a_{2n-1}$ można wybrać n o sumie podzielnej przez n.

Znanych jest obecnie wiele $\mathbf{n}$, dla których $d > D$, ale niewiele wiadomo, jak dokładniej zachowuje się d. Ponadto wciąż nie wiadomo, czy $d = D$ dla ciągów $\mathbf{n}$ długości 3, tzn. dla $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, gdzie $n_1 | n_2 | n_3$ (np. dla ciągów $(3, 3, 15)$, $(5, 10, 10)$). Dla $k \geq 4$ wiadomo, że istnieją kontrprzykłady. Być może Czytelnikowi uda się znaleźć odpowiedzi (choćby częściowe) na postawione pytania bądź artykuł ten zainspiruje Go do postawienia innych, podobnych pytań i znalezienia na nie odpowiedzi.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 670. Udowodnić, że spośród dowolnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ można wybrać pewną ich liczbę, tak by ich suma była podzielna przez n.
Rozwiązanie na str. 7

M 671. Dla jakich dodatnich x część ułamkowa x, część całkowita x oraz sama liczba x tworzą ciąg geometryczny?
Rozwiązanie na str. 7

M 672. Udowodnić, że jeśli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy różnicy owego ciągu.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 359. W pokoju o wymiarach 5 m $\times$ 4 m $\times$ 3 m pracuje komputer, którego ekran elektryzuje się. Natężenie pola elektrycznego w pobliżu ekranu osiąga wartość $E = 3000$ V/m. Ładunek ekranu jest zawsze dodatni. Jeżeli w powietrzu jest przewaga ładunków dodatnich, zakłóca to pracę układu nerwowego człowieka. Dyskomfort jest już odczuwany, gdy stężenie jonów przewyższa stokrotnie standardową jonizację powietrza wynoszącą $i = 20$ jonów/cm^3. Oszacować, co jaki czas trzeba przewietrzać pomieszczenie, aby nie odczuwać dyskomfortu.
Przewodność powietrza wynosi $\sigma = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.
Rozwiązanie na str. 9

F 360. Oszacować, ile neutrin słonecznych przechodzi przez ciało człowieka w ciągu jednej sekundy. W ciągu jednego cyklu przemian termojądrowych powstają średnio 2 neutrina i wydziela się energia $E = 4 \cdot 10^{-12}$ J. Temperatura powierzchni Słońca wynosi $T \approx 6000$ K, promień Słońca $R = 695 \cdot 10^3$ km, odległość Ziemia–Słońce $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.
Rozwiązanie na str. 9