XLVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych, dla których liczby $\frac{x+1}{y}$ i $\frac{y+1}{x}$ są naturalne.

2. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - 1)|x_1 - 1| \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - 1)|x_2 - 1| \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - 1)|x_n - 1|. \end{cases}$$

3. Czworokąt o bokach a, b, c, d jest wpisany w okrąg o promieniu R. Wykazać, że jeżeli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8R^2$, to w czworokącie tym jeden z kątów jest prosty lub przekątne są prostopadłe.

4. W pewnej szkole 64 uczniów bierze udział w pięciu olimpiadach przedmiotowych. W każdej z tych olimpiad uczestniczy co najmniej 19 uczniów tej szkoły; żaden z nich nie jest uczestnikiem więcej niż trzech olimpiad. Udowodnić, że jeżeli każde trzy olimpiady mają wspólnego uczestnika, to pewne dwie mają ich co najmniej pięciu.

II seria

5. Dane są liczby dodatnie a, b. Wykazać równoważność zdań:

(1) $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$,

(2) $ax + \frac{x}{x-1} > b$ dla każdego $x > 1$.

6. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach A', B', C'. Przyjmijmy $u = |AP| : |PA'|$, $v = |BP| : |PB'|$, $w = |CP| : |PC'|$. Wyrazić iloczyn uvw przez sumę $u + v + w$.

7. (a) Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca warunki $2f\big(f(x)\big) = f(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca warunki $-1 \leq 2f\big(f(x)\big) = f(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbf{R}$.

8. W ostrosłupie prawidłowym n-kątnym kąty nachylenia ściany bocznej i krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynoszą odpowiednio α i β. Udowodnić, że

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta \leq \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

III seria

9. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi, których suma równa jest 1. Wykazać, że jeżeli a^3 i b^3 są liczbami wymiernymi, to a i b też są liczbami wymiernymi.

10. Dana jest prosta k oraz leżące na niej trzy różne punkty. Każdy z nich jest początkiem pary półprostych; wszystkie te półproste leżą w jednej półpłaszczyźnie o krawędzi k. Każda z tych par półprostych wyznacza z każdą inną czworokąt. Dowieść, że jeśli w dwa z tych czworokątów można wpisać okrąg, to również w trzeci można wpisać okrąg.

11. Dane są liczby naturalne $n > m > 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy bez zwracania m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy między największą a najmniejszą wylosowaną liczbą.

12. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_n = \frac{2n-3}{2n} \cdot x_{n-1}$$

$$\text{dla} \qquad n = 2, 3, \dots .$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < 1.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

10 października 1994 r. **10 listopada 1994 r.** **10 grudnia 1994 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.