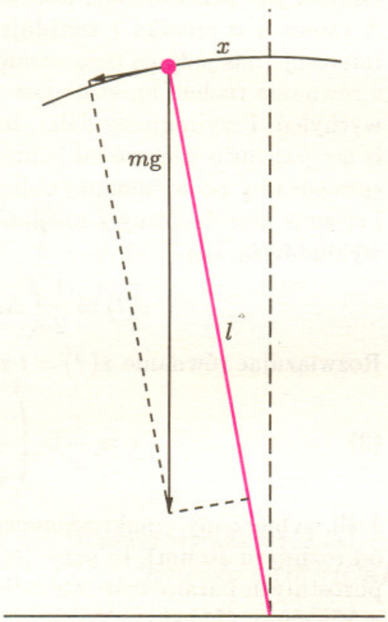
Kwantowy ołówek

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Postawiony pionowo ołówek niemal natychmiast się wywraca, jeśli tylko przestajemy go podtrzymywać. Dzieje się tak dlatego, że nie umiemy go ustawić dokładnie pionowo bądź odrywając rękę nadajemy mu niewielki pęd. Zdaje się jednak, że gdyby pokonać te „techniczne” trudności, ołówek mógłby pozostawać w pionie w nieskończoność. Tak przynajmniej orzeka fizyka klasyczna, o czym jeszcze poniżej. Zakładam oczywiście, że ołówek jest idealnie osiowo symetryczny i odizolowany od wszelkich zaburzeń zewnętrznych.

Mechanika kwantowa, jak pamiętamy, wyklucza, dzięki zasadzie nieoznaczoności, możliwość jednoczesnego określenia położenia i pędu obiektu z dowolną dokładnością. A zatem, jeśli nawet ustawimy ołówek precyzyjnie pionowo, jego pęd będzie się wahał wokół zera, co spowoduje upadek. Zachodzi pytanie, jak długo ołówek może utrzymać się w pionie pomimo kwantowych fluktuacji pędu i położenia.

Jako model ołówka rozważmy kulkę o masie m umocowaną na sztywnym nieważkim ramieniu o długości l. Analizę ograniczymy do sytuacji, gdy kąt wychylenia naszego odwróconego wahadła jest niewielki. Wówczas siła działająca na kulkę stycznie do okręgu, po którym się ona porusza, wynosi mgx/l, gdzie x jest wychyleniem od pionu, g zaś przyspieszeniem ziemskim. Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu



$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \omega^2 x(t) = 0\,, \tag{1}$$

w którym t jest, oczywiście, czasem; $\omega = \sqrt{g/l}$. Równanie to różni się jedynie znakiem od równania oscylatora harmonicznego, w którym ω pełni rolę częstości. Jeśli warunki początkowe przyjąć w postaci

$$x(0) = x_0\,, \quad \frac{d}{dt}x(0) = v_0\,,$$

rozwiązanie równania (1) zapiszemy za pomocą hiperbolicznego sinusa i cosinusa jako

$$x(t) = x_0 \mathrm{ch}\omega t + \frac{v_0}{\omega}\mathrm{sh}\omega t\,.$$

Sinus i cosinus hiperboliczny definiuje się następująco:

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,, \quad \mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,.$$

Z definicji natychmiast wynika, że

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sh}z = \mathrm{ch}z\,, \quad \frac{d}{dz}\mathrm{ch}z = \mathrm{sh}z\,.$$

Zauważmy również, ze dla $z \gg 1$ mamy $\mathrm{sh}z \approx \mathrm{ch}z \approx e^z/2$.

Radiowęglowy zegar odmierza tysiąclecia

Maria KACZMARCZYK

W tkanki żywego organizmu wbudowany jest niezwykły zegar, który może odmierzać tysiąclecia. Rozpoczyna on swój bieg w chwili, gdy tkanki obumierają. Nie wymaga on nakręcania ani zasilania z baterii. Jest to zegar radiowęglowy. Odkrył go amerykański chemik, W.F. Libby, uhonorowany w 1960 r. Nagrodą Nobla.

W latach 1945–1955 Libby zaproponował i opracował metodę absolutnego datowania znalezisk wykopaliskowych o pochodzeniu organicznym. Głównym składnikiem takich przedmiotów jest węgiel. W próbce węgla naturalnego stabilny izotop ^{12}C stanowi 98,89% jej masy. Drugi stabilny izotop, ^{13}C, występuje w ilości 1,11%. W zawierających węgiel związkach organicznych pochodzenia roślinnego znajdują się śladowe ilości promieniotwórczego izotopu węgla ^{14}C. Jego okres połowicznego zaniku wynosi 5730 lat. Izotop ten jest wytwarzany w wysokich warstwach atmosfery w reakcji typu neutron-proton w atmosferycznym azocie

$$^{14}\mathrm{N} + \mathrm{n} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{C} + \mathrm{p}\,. \tag{1}$$

Neutrony wywołujące tę reakcję są wytwarzane w atmosferze przez promieniowanie kosmiczne. Wytworzone jądra ^{14}C rozpadają się przez emisję cząstek β^- i antyneutrin przekształcając się w jądra azotu ^{14}N:

$$^{14}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \beta^- + \tilde{\nu}\,. \tag{2}$$

Atomy węgla łatwo łączą się z tlenem atmosfery w dwutlenek węgla, który jest przyswajany przez rośliny w procesie fotosyntezy. Rośliny oraz zwierzęta i ludzie spożywając pokarmy roślinne lub mięso roślinożernych zwierząt przyswajają wszystkie izotopy węgla wraz z promieniotwórczym ^{14}C. Libby zauważył, że zachodzące w ciągu milionów lat w atmosferze ziemskiej reakcje jądrowe $^{14}N(n,p)^{14}C$ i jednoczesny rozpad wytworzonych radioaktywnych jąder węgla ^{14}C prowadzą do ustalenia się równowagi, w której szybkości zachodzenia obu procesów stają się jednakowe. W wyniku tego przy niezmiennym natężeniu promieniowania kosmicznego ustala się także względna zawartość ^{14}C w atmosferze, a co za tym idzie – procentowa zawartość atomów ^{14}C w węglu z żywych organizmów współczesnych, jak i żyjących tysiące lat temu jest praktycznie taka sama. Jest ona równa około $10^{-10}\%$. Oznacza to, że na bilion atomów węgla żywej tkanki średnio występuje jeden atom ^{14}C. W organizmach, które obumarły, naturalna wymiana węgla ustaje i zawartość atomów ^{14}C maleje nieodwracalnie w wyniku ich rozpadu promieniotwórczego. Na przykład, po upływie okresu równego czasowi połowicznego zaniku ($T_{1/2}$), równego 5730 lat, liczba ta zmniejsza się o połowę. Po upływie 50 tys. lat staje się ona już około 1000 razy mniejsza. Metoda radiowęglowego datowania pozostałości organicznych opiera się na bardzo prostej statystycznej prawidłowości opisującej, w jaki sposób zmniejsza się z biegiem czasu liczba atomów promieniotwórczych w izolowanej próbce. Jeśli w chwili początkowej liczba atomów izotopu promieniotwórczego wynosi N_0, a po upływie czasu t jest ona równa N, to wymieniona prawidłowość ma następującą postać matematyczną

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}. \tag{3}$$

Biorąc pod uwagę to, że aktywność, to znaczy liczba rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu, badanej próbki A jest proporcjonalna do liczby atomów pierwiastka promieniotwórczego N, tj. $A = \lambda \cdot N$, gdzie λ jest stałą rozpadu związaną z czasem połowicznego zaniku wzorem $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, równanie (3) można zapisać w równoważnej postaci

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}. \tag{4}$$

Pomiar aktywności ^{14}C próbki archeologicznej pochodzenia organicznego pozwala wyznaczyć wiek próbki, a ściślej mówiąc – liczbę lat, które upłynęły od chwili obumarcia organizmu. Aktywność A_0 jest równa aktywności zmierzonej dla żywego obecnie organizmu, np. drzewa ściętego przed chwilą dla dokonania pomiarów. Na przykład, próbka o zawartości 1 grama węgla zawiera $5{,}014 \cdot 10^{22}$ wszystkich atomów węgla, a w tym jest $N_0 = 5{,}014 \cdot 10^{10}$ atomów węgla ^{14}C. Wobec tego, że stała rozpadu dla ^{14}C wynosi $\lambda = 3{,}83 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1}$, aktywność jest równa $A_0 = \lambda N_0 = 11{,}5$ rozpadów na minutę. Wiek znaleziska można określić przez pomiar aktywności próbek organicznych lub skamielin pobranych w wykopaliskach, a więc ze szczątków organizmów lub tkanek, które od wielu lat przestały pobierać węgiel z otoczenia. Wartość tę oblicza się z równania

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)} \tag{5}$$

Dla $x_0 = v_0 = 0$ mamy $x(t) = 0$, a zatem odwrócone wahadło pozostaje w spoczynku. Tyle mechanika klasyczna. Jak już jednak wspomniałem, taki wybór warunków początkowych przeczy kwantowej zasadzie nieoznaczoności. Jeśli położenie określone jest z dokładnością Δx, to pęd jedynie z dokładnością

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

gdzie $\hbar$ jest stałą Plancka.

Pełna kwantowo-mechaniczna analiza ruchu odwróconego wahadła jest bardzo skomplikowana. Ograniczymy się tutaj jedynie do podania „kwantowych” warunków początkowych rozwiązania klasycznego równania ruchu (1). Wybierzmy te warunki w postaci

$$x(0) = \Delta x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(0) = \frac{\hbar}{m\Delta x},$$

tzn. zakładamy najmniejsze odchylenie od wartości zerowych dopuszczane przez zasadę nieoznaczoności.

Rozwiązanie równania (1) wygląda teraz następująco

$$x(t) = \Delta x \operatorname{ch}\omega t + \frac{\hbar}{m\omega\Delta x}\operatorname{sh}\omega t. \tag{2}$$

Ołówek jest przewrócony, jeśli wychylenie osiąga jego długość. A zatem czas upadku τ znajdujemy z równania $x(\tau) = l$. Ponieważ interesuje nas jedynie oszacowanie tego czasu, nadal korzystamy z równania ruchu (1), które jest poprawne tylko dla małych wychyleń. Przyjmujemy dalej, że czas upadku jest na tyle długi, iż $\omega\tau$ jest dużo większe od jedności. (Prawdziwość tego założenia sprawdzamy po wykonaniu obliczeń i znalezieniu τ.) Wówczas sinus i cosinus hiperboliczny z równania (2) możemy przybliżyć funkcją wykładniczą, tzn.

$$x(t) \approx \frac{1}{2}\left(\Delta x + \frac{\hbar}{m\omega\Delta x}\right)\mathrm{e}^{\omega t}.$$

Rozwiązując równanie $x(\tau) = l$ znajdujemy

$$\tau \approx \frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{2l}{\Delta x + \dfrac{\hbar}{m\omega\Delta x}}\right). \tag{3}$$

Jeśli wybierzemy „makroskopową” wielkość Δx (tzn. dużo większą od rozmiaru atomu), to przy „makroskopowych” wartościach pozostałych parametrów wahadła l i m możemy zaniedbać w równaniu (3) człon zawierający stałą Plancka i odtwarzamy rezultat klasyczny odpowiadający zerowej prędkości początkowej i wychyleniu początkowemu Δx.

Jak widzimy, czas upadku τ w równaniu (3) niemonotonicznie zależy od Δx i przyjmuje największą wartość

$$\tau_{\max} \approx \frac{1}{2\omega}\ln\left(\frac{l^2 m\omega}{\hbar}\right) \tag{4}$$

dla

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{\hbar}{\Delta p}. \tag{5}$$

Maksymalny czas upadku (4) dąży do nieskończoności w granicy klasycznej, tj. kiedy $\hbar \to 0$. Podstawiając do wzorów (4) i (5) $l = 0{,}1$ m, $m = 0{,}01$ kg, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ oraz $\hbar = 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ otrzymujemy $\tau_{\max} \approx 4$ s oraz $\Delta x \approx 3 \cdot 10^{-17}$ m. A zatem, by osiągnąć maksymalny czas upadku, należałoby ustawić położenie ołówka z dokładnością do wielkości 10^7 razy mniejszej niż średnica atomu. Nie muszę wyjaśniać, że jest to zupełnie niemożliwe.