XLVII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których równanie $2\sin nx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych x.

2. Liczbą palindromiczną nazywamy taką liczbę naturalną, której zapis dziesiętny czytany od strony lewej do prawej jest taki sam, jak czytany od strony prawej do lewej. Niech (x_n) będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb palindromicznych. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które są dzielnikami co najmniej jednej z różnic $x_{n+1} - x_n$.

3. W pewnej grupie kn osób każda zna więcej niż $(k-1)n$ innych (k, n są liczbami naturalnymi). Wykazać, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

Uwaga. Jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

4. Prosta styczna do okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że $\dfrac{|AD|}{|DB|} + \dfrac{|AE|}{|EC|} = 1$.

II seria

5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = \alpha > \frac{\pi}{2}$, oraz odcinek PQ, którego środkiem jest punkt A. Dowieść, że

$$(|BP| + |CQ|)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geq |BC|.$$

6. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich: ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ i ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$; liczby r, q są względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli ciągi te mają jeden wspólny wyraz, to mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

7. Liczby nieujemne a, b, c, p, q, r spełniają warunki:

$$a + b + c = p + q + r = 1;\quad p, q, r \leq \frac{1}{2}.$$

Dowieść, że $8abc \leq pa + qb + rc$, oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

8. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą *kąt padania równy kątowi odbicia*. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nigdy nie trafił w wierzchołek ani nie przeszedł wcześniej przez środek. Dowieść, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.

III seria

9. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

10. Wykazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

11. W konkursie skoków narciarskich uczestniczy 65 zawodników. Startują oni kolejno, według ustalonego wcześniej porządku. Każdy wykonuje jeden skok. Przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne, oraz że każda kolejność końcowa zawodników jest jednakowo prawdopodobna. W każdym momencie konkursu liderem nazywamy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo tego, że w czasie całego konkursu dokładnie jeden raz nastąpiła zmiana lidera. Wykazać, że $p > \dfrac{1}{16}$.

12. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa przystające sześciany o wspólnym środku, że każda ściana pierwszego sześcianu ma punkt wspólny z każdą ścianą drugiego sześcianu.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

10 października 1995 r. (I seria) — **10 listopada 1995 r.** (II seria) — **10 grudnia 1995 r.** (III seria)

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.