mała delta

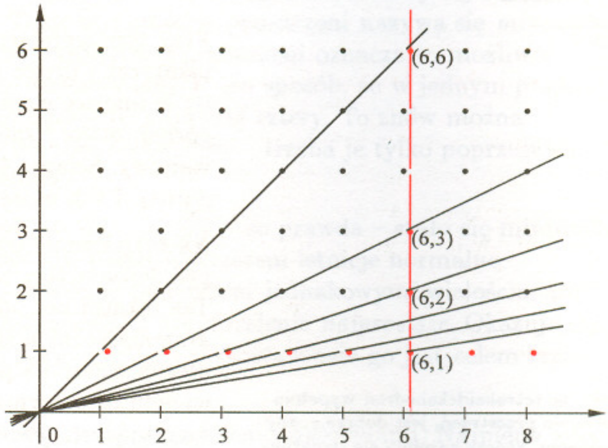
Dwie łatwe do wykonania pomoce geometryczne do arytmetyki

Geometria i arytmetyka wydają się różnymi światami. Tak bardzo, że często nauczyciele matematyki uprzedzają, którego dnia na lekcji będzie geometria, a którego „reszta". Zobaczmy więc, jak geometria może wyrażać fakty wybitnie arytmetyczne. Poszukamy na płaszczyźnie najpierw dzielników dowolnej liczby naturalnej, a potem znajdziemy wszystkie liczby złożone (a co za tym idzie także wszystkie liczby pierwsze).

Zacznijmy od zaznaczenia na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych wszystkich punktów, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi. No dobrze, zaznaczcie tylko tyle, na ile Wam cierpliwości starczy, ale spróbujcie objąć wyobraźnią jak największy obszar płaszczyzny. Takie punkty nazywane są punktami *kratowymi*.

Teraz przez każdy punkt postaci $(k, 1)$, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną, poprowadźcie prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ (zgadzam się na ograniczenie: tyle, ile zdążycie poprowadzić przed obiadem). Taką prostą przechodzącą przez punkt $(k, 1)$ nazwijmy p_k. I już pierwsza pomoc naukowa jest gotowa. Chcecie sprawdzić, jakie dzielniki ma liczba 457? To proste. Poprowadźcie z punktu $(457, 0)$ prostą pionową. Punkty kratowe, w których ta prosta przecina proste p_k, wyznaczają dzielniki 457 (wszystkie, jeśli zdążyliście poprowadzić wszystkie proste p_k od p_1 aż do p_{457}): są nimi rzędne owych kratowych punktów przecięcia.

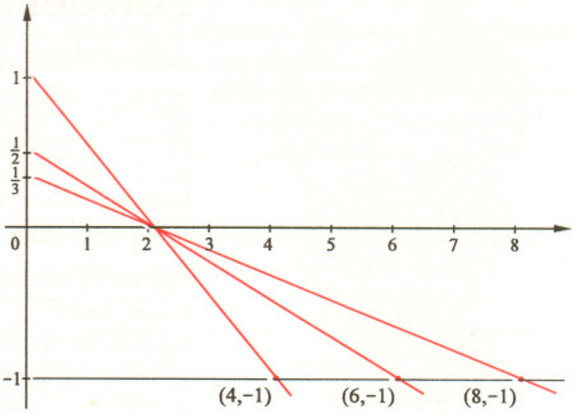
Dlaczego? To jasne. Każda prosta p_k ma równanie $y = \frac{x}{k}$, więc jeśli prosta $x = 457$ przecina prostą p_k w punkcie $(457, m)$, to $m = \frac{457}{k}$, czyli m jest dzielnikiem 457. I odwrotnie: jeśli m jest dzielnikiem 457, to dla pewnej liczby naturalnej k, $457 = m \cdot k$, co oznacza, że punkt $(457, m)$ jest punktem wspólnym prostej $x = 457$ i prostej p_k.



Otrzymaliśmy zatem prostą (?!) tablicę do wyszukiwania dzielników liczb naturalnych. Do tej pomocy naukowej producent dodaje premię: przecięcie prostej $y = m$ ze zbiorem punktów kratowych leżących na prostych p_k daje wszystkie wielokrotności liczby m. Ot, taka nieskończona geometryczna tabliczka mnożenia.

Druga pomoc naukowa, którą chcę Wam dzisiaj ofiarować, pomoże wyszukać wszystkie liczby pierwsze (są w świecie instytucje gotowe wiele zapłacić za bardzo dużą liczbę pierwszą; takie liczby są potrzebne do szyfrowania danych). Otóż tym razem zaznaczcie na osi Oy wszystkie punkty postaci $(0, \frac{1}{k})$ dla $k = 1, 2, \ldots$, a na osi Ox wszystkie punkty postaci $(m + 1, 0)$ dla $m = 1, 2, \ldots$ Teraz każdy z takich punktów na osi Oy połączcie prostą z każdym z wyznaczonych punktów na osi Ox. Pierwsze współrzędne punktów przecięcia tych prostych z prostą $y = -1$ dadzą zbiór wszystkich liczb złożonych.

Wyjaśnienie znów nie jest skomplikowane. Prosta przechodząca przez punkty $(0, \frac{1}{k})$ i $(m+1, 0)$ ma równanie $\frac{x}{m+1} + ky = 1$, a zatem punktem przecięcia tej prostej z prostą $y = -1$ jest punkt, którego pierwszą współrzędną jest $(m+1)\cdot(k+1)$. Otrzymaliśmy zatem liczbę złożoną. Z kolei jeśli n jest liczbą złożoną, to dla pewnych liczb naturalnych m i k jest $n = (m+1)\cdot(k+1)$, zatem n jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej przechodzącej przez punkty $(0, \frac{1}{k})$ i $(m+1, 0)$ z prostą $y = -1$. Zatem przedstawiona tu metoda wyłapuje wszystkie liczby złożone i tylko takie liczby.



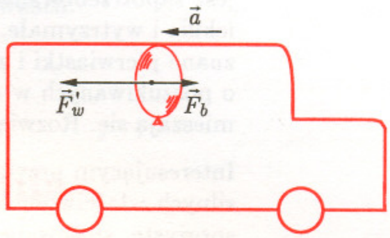
A skąd wziąć wszystkie liczby pierwsze? Cóż, należałoby się zastanowić...

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Autobus, balonik i trzepak

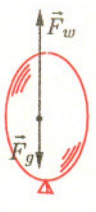
Kiedy autobus gwałtownie hamuje, wszyscy pasażerowie doznają działania siły skierowanej do przodu, kiedy rusza – do tyłu. Gdy skręca w prawo, siła działa w lewo, gdy skręca w lewo, siła działa w prawo. Jest to siła bezwładności, jej istnienie wynika nie z oddziaływania innych ciał, ale z tego, że poruszający się ruchem zmiennym autobus jest nieinercjalnym układem odniesienia. W rzeczywistości pasażerowie cały czas poruszają się w ten sam sposób; to autobus przesuwa się „pod nimi". Siła pozorna działająca na pasażera o masie m dana jest równaniem $\vec{F} = -m\vec{a}$, gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem autobusu względem inercjalnego układu odniesienia. Oczywiście, na pasażerów w autobusie działają także i inne siły (chociażby tarcie), które po pewnym czasie „dostosują" ich ruch do ruchu autobusu.

A co będzie się działo z balonikiem unoszącym się pod dachem autobusu? Także i na niego zadziała siła bezwładności. To jednak nie wszystko. Kiedy balonik unosi się tylko w polu grawitacyjnym, prócz siły ciężkości działa na niego także siła wyporu. Siła bezwładności jest jakby dodatkowym ciężarem, tyle, że skierowanym poziomo. Obecność powietrza skutkuje powstaniem dodatkowej siły wyporu skierowanej



Siły działające na balonik w hamującym autobusie
$$F'_w - F_b = (\varrho - \varrho_b)va\,,$$
gdzie a jest przyspieszeniem autobusu. Wypadkowa sił F_w i F_g jest zrównoważona przez siłę reakcji dachu autobusu.

przeciwnie niż siła bezwładności i większej od niej, jeśli tylko balonik wypełniono gazem lżejszym od powietrza. Tak więc podczas gdy w hamującym autobusie pasażerowie poddani działaniu siły bezwładności będą przesuwać się do przodu, balonik poddany działaniu wypadkowej siły bezwładności i „antybezwładnościowego" wyporu przesunie się do tyłu. A co się stanie z płomieniem świecy w podobnej sytuacji?



Wypadkowa siły wyporu i ciężaru balonika wypełnionego gazem lżejszym od powietrza jest skierowana pionowo do góry i ma wartość
$$F_w - F_g = (\varrho - \varrho_b)vg\,,$$
v – objętość balonika, ϱ – gęstość powietrza, ϱ_b – gęstość gazu w baloniku, g – przyspieszenie grawitacyjne.

Innego przykładu działania sił bezwładności możemy się dopatrzyć (uwaga na oczy!) podczas trzepania dywanu. Uderzając w dywan trzepaczką nadajemy mu przyspieszenie. Na cząsteczki kurzu i piasku, tkwiące w jego włóknach, zadziała siła bezwładności o takim samym kierunku, jak uderzenie trzepaczką, ale o przeciwnym zwrocie. Jeśli cząsteczki piasku i kurzu są mocno zaklinowane, to – aby je usunąć – potrzebujemy dużej siły, ponieważ musimy pokonać spore siły tarcia. Dlatego siła bezwładności powinna być większa od maksymalnej wartości tarcia statycznego działającego na niepożądane cząsteczki. Dywan musi uzyskać duże przyspieszenie, te zaś jest odwrotnie proporcjonalne do jego (zazwyczaj dość dużej) masy. Wszystko to sprawia, że trzepanie jest takie męczące!

Krzysztof REJMER