XLVIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x\cdot|x| + y\cdot|y| = 1\,, \\ [x] + [y] = 1\,. \end{cases}$$
Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t.

2. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\angle ABP = \angle ADP$. Wykazać, że $\angle PAB = \angle PCB$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geq 1$, $c \geq 0$ oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $(ab+c)^n - c \leq \big((b+c)^n - c\big)a^n$.

4. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geq 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geq 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

II seria

5. Dwusieczne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F, a okrąg opisany na trójkącie ABC – odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że
$$\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geq 9.$$

6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek
$$P(k) = \frac{1}{k} \qquad \text{dla } k = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\,.$$
Obliczyć $P(0)$.

7. Obliczyć kres górny objętości czworościanów zawartych w kuli o danym promieniu R, których jedną z krawędzi jest średnica tej kuli.

8. Niech a_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 6n\}$, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5 oraz niech b_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 7n\}$, których iloczyn elementów daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5. Obliczyć iloraz a_n/b_n.

III seria

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \langle 1;\infty) \to \langle 1;\infty)$ spełniające następujące warunki:

(i) $f(x+1) = \dfrac{\big(f(x)\big)^2 - 1}{x}$ dla $x \geq 1$;

(ii) funkcja $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ jest ograniczona.

10. Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\angle ACP = \angle BCQ$ oraz $\angle CAP = \angle BAQ$. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Dowieść, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF.

11. Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

12. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

10 października 1996 r. **10 listopada 1996 r.** **10 grudnia 1996 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 323, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.