czasopismo dla nauczycieli
MATEMATYKA

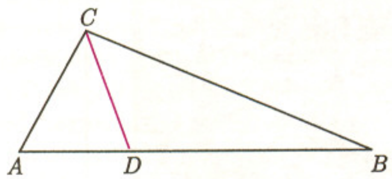
Dwusieczne w szkole?

W *Małej Delcie* z numeru 12/1997 Marek Kordos ubolewa nad tym, że uogólnienia twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym nie znalazły się w podręcznikach szkoły podstawowej, choć można je ładnie i elementarnie udowodnić. Cóż, przy takim wymiarze godzin matematyki, jaki mamy w szkole obecnie, jest znacznie więcej ładnych i elementarnych twierdzeń, na które nie ma tam miejsca. Jednym z nich jest twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie, pojawiające się w niektórych podręcznikach dla szkół średnich jako zadanie „na twierdzenie sinusów":

jeśli CD jest dwusieczną kąta ACB, to $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ (rys. 1),

z następującym rozwiązaniem:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{AD}{\sin\angle ACD}}{\frac{BD}{\sin\angle BCD}} = \frac{\frac{AC}{\sin\angle ADC}}{\frac{BC}{\sin\angle BDC}} = \frac{AC}{BC}.$$

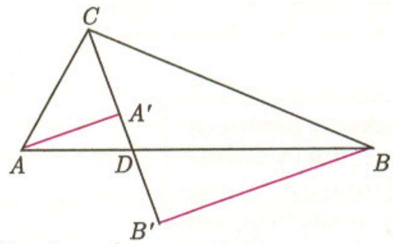


Rys. 1

Jeśli jednak – jak w szkole podstawowej – nie dysponujemy twierdzeniem sinusów, to musimy coś zauważyć, na przykład to, że trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość, a więc stosunek ich podstaw jest równy stosunkowi ich pól, ten zaś z kolei – stosunkowi wysokości opuszczonych na wspólny bok CD (rys. 2). Daje to dowód

$$\frac{AD}{BD} = \frac{P_{\Delta ADC}}{P_{\Delta BDC}} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AC \sin\angle ACD}{BC \sin\angle BCD} = \frac{AC}{BC},$$

który można przeprowadzić w klasie VIII.



Rys. 2

Mając jednak narysowane wysokości AA' i BB', możemy zauważyć, że trójkąty prostokątne $AA'C$ i $BB'C$ są podobne (równe kąty) i bez użycia funkcji sinus uzyskać $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC}$.
Z pól też można zrezygnować: podobieństwo trójkątów $AA'D$ i $BB'D$ analogicznie daje $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AD}{BD}$.

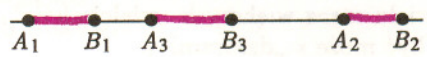
Tym sposobem umożliwiamy przeprowadzenie dowodu w klasie VII.

Oczywiście, okręgu nie można zakreskować; również
nie można zakreskować prostej.

Przypuśćmy, że jest pewien sposób zakreskowania prostej.

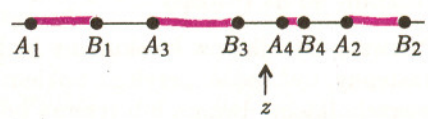
Niech A_1B_1, A_2B_2 będą dwiema kreskami (możemy przyjąć, że nazwy są tak dobrane, że A_i to lewe końce, oraz że A_1B_1 leży cały na lewo od A_2B_2).

Punkt pośrodku odstępu pomiędzy nimi „przykryty" jest też jakąś kreską – nazwijmy ją A_3B_3



(kreska A_3B_3 leży cała w odstępie pomiędzy A_1B_1 a A_2B_2).

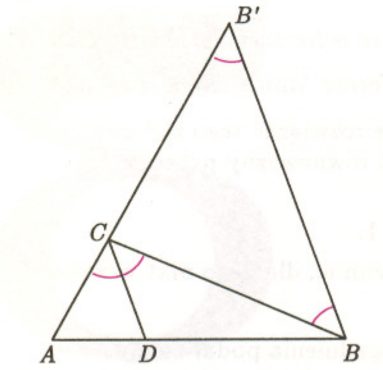
Również punkt pośrodku odstępu pomiędzy A_2B_2 a A_3B_3 jest „przykryty" – przez kreskę, którą nazwiemy A_4B_4.



Podobnie punkt pośrodku odstępu pomiędzy A_3B_3 i A_4B_4, i tak dalej.

Prawe końce kresek nieparzystych, punkty $B_1, B_3, B_5, \ldots$, leżą coraz bardziej na prawo, ale stale na lewo od punktów $A_2, A_4, A_6, \ldots$. Ciągi punktów $B_1, B_3, B_5, \ldots$ oraz $A_2, A_4, A_6, \ldots$ skupiają się wokół pewnego punktu z. Punkt z nie może należeć do żadnej kreski (bo wnętrze kreski oddziela każdy ze swoich punktów wewnętrznych od końców innych kresek, a swój koniec oddziela z jednej strony od innych końców).

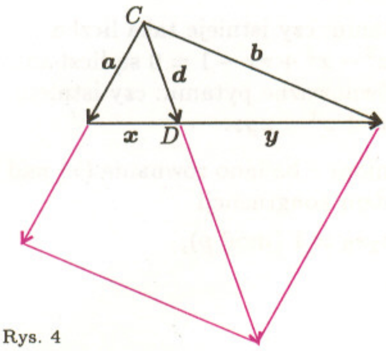
Kreskówki cd. str. 7



Rys. 3

W tej samej klasie możemy zrobić to inaczej, zamiast z podobieństwa korzystając bezpośrednio z twierdzenia Talesa. Mianowicie przedłużamy bok AC o odcinek równy BC. Trójkąt $BB'C$ jest równoramienny, kąt ACB jest jego kątem zewnętrznym, a więc cztery kąty, oznaczone na rysunku 3 kolorem, są równe – proste CD i BB' są równoległe.

Niestety, nie widać sposobu udowodnienia omawianego twierdzenia w klasie VI, gdy uczniowie nie znają jeszcze twierdzenia Talesa. Ale – dla skompletowania kolekcji – można jeszcze pomyśleć o dowodzie rachunkowym (analitycznym) oraz wektorowym. Ten pierwszy odłóżmy na bok, drugi wyszedł mi dość skomplikowany – może ktoś pomoże znaleźć coś prostszego?



Rys. 4

Niech $k = |\boldsymbol{b}| : |\boldsymbol{a}|$. Wydłużając k-krotnie wektor $\boldsymbol{a}$, otrzymujemy romb, na którego przekątnej leży punkt D (rys. 4). Przekątna (traktowana jako wektor) jest równa $k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$). Wektory $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}$ są współliniowe, mamy więc $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ dla pewnej stałej dodatniej t. Teza dowodzonego twierdzenia oznacza, że $t = k$, a to wynika z następujących rachunków (Czytelnik zechce zinterpretować znaczenie pomocniczego parametru l):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - lk\boldsymbol{a} - l\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{x} = t(lk\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

czyli

$$(1-l)\boldsymbol{b} - lk\boldsymbol{a} = tl\boldsymbol{b} + t(lk-1)\boldsymbol{a}.$$

Ponieważ wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są liniowo niezależne, więc otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} 1-l &= tl \\ lk &= t(1-lk), \end{cases}$$

z którego po wyliczeniu, że $l = \dfrac{1}{t+1}$, mamy $\dfrac{k}{t+1} = t\left(1 - \dfrac{k}{t+1}\right)$, czyli $k(t+1) = t(t+1)$, co wobec dodatniości stałej t kończy dowód.

Agnieszka WOJCIECHOWSKA

Tylko dla dorosłych

Poniższe twierdzenia (każde z osobna) uzasadniają, że kreskując trójkąt, koło czy pewien obszar na płaszczyźnie, musimy użyć nieprzeliczalnie wielu odcinków.

TWIERDZENIE (Baire)
W przestrzeni zupełnej X suma przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym (w szczególności suma ta nie jest całym zbiorem X).

TWIERDZENIE (Sierpiński)
Żadne continuum nie jest sumą przeliczalnie wielu parami rozłącznych zbiorów domkniętych ($\neq \emptyset$). (Oczywiście, chodzi o sumę co najmniej dwóch zbiorów.)

ĆWICZENIE. Jak zastosować Twierdzenie Sierpińskiego do obszaru na płaszczyźnie (brak zwartości!)?

Jednak te twierdzenia nie rozstrzygają, czy potrzeba aż continuum odcinków do zakreskowania tych figur.

ĆWICZENIE. Pokazać, że kreskując obszar płaszczyzny, musimy użyć continuum odcinków.
(PODPOWIEDŹ: Zmodyfikować argumentację ze strony 6.)

Z problemem kreskowania wiąże się następujące

TWIERDZENIE (Moore)
Każda rodzina parami rozłącznych triodów na płaszczyźnie jest przeliczalna.
(Triod to homeomorficzny obraz przestrzeni zwartej w kształcie litery Y – sumy trzech odcinków o wspólnym jednym końcu.)

Zatem nie można „zatriodować” ani trójkąta, ani koła, ani żadnego obszaru płaszczyzny (triod jest, oczywiście, nigdziegęstym podzbiorem każdej z tych figur).

Ale

czy można „zatriodować” sześcian, czworościan lub kulę?

Kreskówki przygotował
Krzysztof OMILJANOWSKI