2/99 (14)

Γ-limatias ($\lim_{n\to\infty}$)

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (12')

Wyjaśnienie oszustwa (12): Sposób obliczenia wartości oczekiwanej wygranej Bazylego jest poprawny pod warunkiem, że ta wartość oczekiwana istnieje! Tymczasem

$$w = -2 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{20}{6} + \frac{10}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{40}{36} + \frac{50}{36} - \frac{200}{36} + \frac{100}{216} + \frac{200}{216} + \frac{300}{216} + \frac{400}{216} + \frac{500}{216} - \ldots - \frac{2\cdot 10^n}{6^n} + \frac{1\cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{2\cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{3\cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{4\cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{5\cdot 10^n}{6^{n+1}} - \frac{2\cdot 10^{n+1}}{6^{n+1}} + \ldots$$

Powyższy szereg jest rozbieżny, gdyż zawiera wyrazy dodatnie i ujemne o dowolnie dużej wartości bezwzględnej. Co więcej, szereg ten nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, trudno więc o racjonalne argumentowanie, czy powyższa suma „wygląda" bardziej dodatnio, czy bardziej ujemnie.

Błąd w rozumowaniu Bazylego jest podobny do następującego przykładu: Ile wynosi suma $1+2+4+ +8+16+32+64+128+\ldots$? Jeżeli zignorujemy rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 2, to jego sumę obliczymy: $s = 1+2s$, skąd $s=-1$. Trochę mało jak na sumę liczb dodatnich. W tym przykładzie potrafimy jednak odpowiedzieć na pytanie o sumę – widać gołym okiem, że suma ta wynosi $+\infty$.

Tymczasem szereg we wzorze na wartość oczekiwaną w bardziej przypomina szereg geometryczny o ilorazie -2 $(1-2+4-8+16-32+64-128+\ldots)$, który nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, ani też nie widać żadnych argumentów przemawiających za tym, by uznać go za bardziej dodatni niż ujemny lub na odwrót. Naiwne wyliczenie jego sumy daje $S = 1-2S$, skąd $S=\frac{1}{3}$. To jednak, jak już się przekonaliśmy, zupełnie o niczym nie świadczy.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (13')

Wyjaśnienie oszustwa (13): Liczba c zależy od x. Zatem $f'(c)$ nie jest stałą i w związku z tym różniczkowanie wzoru (♠) jest błędne.

JWR

PISZEMY PRACE (2)

Rubryka adresowana jest do uczniów. Wyniki uzyskane w najlepszych pracach zostaną omówione w Gammalimatiasie. Najlepsze prace wezmą udział w **Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki**.

KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA W GEOMETRII

Krzywa płaska drugiego stopnia to zbiór o równaniu

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Zbiór taki jest zazwyczaj elipsą, parabolą lub parą hiperbol. Czasami degeneruje się on do czegoś prostszego: prostej, pary prostych, punktu, zbioru pustego lub całej płaszczyzny. Interesują nas zagadnienia geometryczne, w których pojawiają się wyżej opisane krzywe. Każda z tych krzywych oprócz definicji analitycznej ma też definicję czysto geometryczną.

Elipsa to zbiór punktów, których suma odległości od dwu ustalonych punktów zwanych ogniskami jest stała. Szczególnym przypadkiem elipsy jest okrąg.

Zbiór punktów o stałej różnicy odległości od ognisk to **hiperbola**.

Parabola to zbiór punktów, których odległość od ogniska jest równa odległości od ustalonej prostej zwanej kierownicą.

A oto przykłady zagadnień geometrycznych, w których mogą pojawić się krzywe drugiego stopnia:

Dane są dwa różne punkty A i B. Czym jest zbiór punktów o stałym ilorazie (lub sumie kwadratów lub różnicy kwadratów) odległości od punktów A i B? Jaka jest odpowiedź na podobne pytania gdy dane są punkt i prosta? Czym jest miejsce zbiór punktów o stałej sumie odległości od danych n punktów? A od n punktów i prostej?

Dane są punkty A, B, C i liczba rzeczywista a. Czym może być zbiór punktów P o stałej wielkości $AP^2 + BP^2 - a\cdot CP^2$ w zależności od a i wzajemnego położenia punktów A, B i C?

Niech A, B, C, D będą kolejnymi wierzchołkami rombu. Czym jest zbiór punktów P o stałym $AP^4 - BP^4 + CP^4 - DP^4$?

Spróbuj przeanalizować te zagadnienia i pomyśl o innych problemach prowadzących do krzywych drugiego stopnia. A może uda Ci się znaleźć pewne uogólnienia w przestrzeni trójwymiarowej?

Prace prosimy przesyłać pod adresem Gammalimatiasu do 15 kwietnia 1999 r. Autorów prosimy o podanie imienia, nazwiska, adresu prywatnego, klasy oraz nazwy i adresu szkoły. Prosimy o zaznaczenie, czy praca była pisana pod kierunkiem opiekuna – jeśli tak, prosimy o podanie jego imienia, nazwiska i adresu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl