Dzwonnik z Londynu

Francesc ROSSELLÓ

Zanim Lagrange zaczął stosować permutacje do badania równań algebraicznych, pewien Anglik uczynił z nich użytek w sposób bardzo przypominający o sto lat późniejszą teorię grup. Mowa o Fabianie Stedmanie, urodzonym w 1640 r. w Londynie, drukarzu, a potem – aż do śmierci w 1713 r. – poborcy podatkowym. Do historii wprowadziło Stedmana jego hobby. Należał do przeróżnych stowarzyszeń miłośników muzyki dzwonów, a jego dwie książki *Tintinnalogia* (1668) i *Campanalogia* (1677) czynią z niego ojca nowoczesnego dzwonienia. To, co może nas tu zainteresować, to elementy teorii grup, które można odnaleźć w jego pracach – cały długi wiek przed Lagrangem.

Grupa – algebra $(G, \circ, ^{-1}, e)$, w której $\circ$ jest dwuargumentowym działaniem łącznym, e elementem neutralnym względem $\circ$, a $^{-1}$ taką funkcją, że $a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$ dla każdego elementu a grupy.

W Anglii (a także, w mniejszym stopniu, w innych krajach pod brytyjskim wpływem) gra na dzwonach nie polega na układaniu ślicznych melodii, lecz na tworzeniu ciągów uderzeń, w stylu zwanym *change ringing*: w n dzwonów, ponumerowanych $1, 2, \ldots, n$, uderza się kolejno w różnych permutacjach (w języku dzwonników zwanych *sekwencjami*). Z przyczyn technicznych każde przejście do kolejnej sekwencji (czyli *zmiana*) musi być zadane rozłącznymi transpozycjami sąsiadujących dzwonów: *zmiana prosta* składa się z jednej takiej transpozycji, natomiast *zmiana skrzyżowana* dopuszcza ich więcej (koniecznie rozłącznych).

Transpozycja – permutacja polegająca na tym, że dwa elementy zamienia się miejscami.

Utrzymana w tym stylu kompozycja, zwana *biciem*, jest więc ciągiem następujących po sobie sekwencji, zaczynającym się i kończącym sekwencją *okrągłą* $(1, 2, \ldots, n)$; od sekwencji do sekwencji prowadzi zmiana prosta lub złożona. Możemy zatem traktować bicie jako ciąg permutacji $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ zbioru n-elementowego, z których każda jest złożeniem rozłącznych transpozycji, a złożenie wszystkich, czyli $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_k$ jest permutacją identycznościową e; powiemy wówczas, że *biciem odpowiadającym równości* $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_k = e$ jest

$$\begin{array}{l} e \\ \sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \\ \hline e \end{array}$$

Od bicia oczekiwano następujących własności (zwanych przez dzwonników, o dziwo, *aksjomatami*):

- Każde bicie ma się zaczynać i kończyć sekwencją okrągłą (o czym już była mowa).
- Przy przejściu od jednej sekwencji do następnej żaden dzwon nie może się przesunąć o więcej niż jedno miejsce w ciągu.
- Żadna sekwencja nie może wystąpić dwa razy w jednym biciu.
- Żaden dzwon nie może pozostać na tej samej pozycji w trzech kolejnych sekwencjach.
- Całe bicie musi być podzielone na palindromiczne części (zwane *układami*) jednakowej długości (czyli ciąg zmian, czytany od tyłu, jest taki sam, jak w normalnej kolejności).

Fizyczne metody datowania w badaniu prehistorii człowieka

Grzegorz WROCHNA

Homo sapiens to jedyny w przyrodzie gatunek, który stawia sobie pytania o swoją własną przeszłość. Kiedy pojawił się na naszej planecie? Jak do tego doszło? Czy wyodrębnił się spośród innych gatunków w sposób ciągły, na drodze powolnej ewolucji, czy też raczej skokowy, z wyraźnie określonym początkiem? Jeśli ciągły, to jak wyglądały ogniwa pośrednie? Jeśli skokowy, to jaki był mechanizm tego skoku? Te i inne pytania są domeną poszukiwań archeologicznych. Kiedy jednak archeolog znajdzie interesujący obiekt i zadaje sobie pytanie, z jakiego okresu on pochodzi, z pomocą przychodzi fizyka.

Największe usługi oddała tu metoda **radioizotopowa**, oparta na rozpadzie izotopu węgla ^{14}C. Jest on produkowany w atmosferze przez neutrony powstałe wskutek oddziaływania protonów promieniowania kosmicznego z atmosferą

$$n + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}\mathrm{C} + p$$

w ilości około 7,5 kg na rok. Rozpada się on samorzutnie z czasem połowicznego rozpadu $\tau_{1/2} = 5730$ lat

$${}^{14}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + e.$$

Równowaga między produkcją a rozpadem ustala się na poziomie ${}^{14}\mathrm{C}/{}^{12}\mathrm{C} = 1{,}5 \cdot 10^{-12}$. W atmosferze ^{14}C łączy się z tlenem, tworząc radioaktywny dwutlenek węgla $^{14}CO_2$, który może być absorbowany przez rośliny podobnie jak normalny $^{12}CO_2$. Stąd może się też przedostawać do organizmów zwierzęcych. Dopóki organizm żyje i odżywia się, zachowuje stały stosunek ${}^{14}\mathrm{C}/{}^{12}\mathrm{C}$. Od momentu śmierci przestaje uzupełniać rozpadający się ^{14}C, co powoduje zmniejszanie się stosunku ${}^{14}\mathrm{C}/{}^{12}\mathrm{C}$. Mierząc ten stosunek w badanej próbce, możemy zatem określić czas, jaki upłynął od śmierci organizmu.

Pierwszym sprawdzianem opracowanej w 1947 r. metody było porównanie zmierzonego wieku piramid egipskich z zapiskami historycznymi sprzed 2000–5000 lat. Pierwszym odkrywczym jej zastosowaniem było określenie wieku znanego z Biblii miasta Jerycho na 7000–8000 lat, dwa razy więcej niż dotychczas przypuszczano.

Ponadto, dobre bicie musiało być odpowiednio długie i zawierać jak najmniej różnych zmian (oczywiście, powtarzanych tyle razy, ile było to konieczne). Bicie, zawierające wszystkie możliwe dla danego zestawu dzwonów sekwencje, nazwiemy *pełnym*. Tak więc pełne bicie n dzwonów zawiera $n! + 1$ sekwencji (łącznie z powtórzoną ostatnią sekwencją okrągłą).

$$\begin{array}{c}(1,2,3,4)\\(2,1,4,3)\\(2,4,1,3)\\(4,2,3,1)\\(4,3,2,1)\\(3,4,1,2)\\(3,1,4,2)\\ \underline{(1,3,2,4)}\\(1,2,3,4)\end{array}$$

Popatrzmy (przykład obok) na bicie z 1621 roku, znane jako „Układ Podstawowy dla czterech dzwonów" i odpowiadające ciągowi 9 sekwencji.

Jeśli przyjmiemy $\sigma_1 = (1,2)(3,4)$ i $\sigma_2 = (2,3)$, to zmiany, wykonywane w tej kompozycji, są następujące (w podanej kolejności):

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2,$$

bicie odpowiada zatem równości $(\sigma_1\sigma_2)^4 = e$ w S_4. Nie jest ono szczególnie długie (S_4 ma przecież 24 elementy, a σ_1 i σ_2 generują podgrupę D_4), ale spełnia wszystkie pozostałe warunki. Zauważmy, na przykład, że powtarzanie zmiany σ_1 zapewnia, iż żaden dzwon nie pozostanie na swoim miejscu przez trzy kolejne sekwencje. Bicie zawiera tylko jeden układ (stąd nazwa „Układ podstawowy"), widoczny zwłaszcza po odrzuceniu ostatniej zmiany σ_2, która ma doprowadzić do powrotu do sytuacji wyjściowej.

S_n, tzw. grupa symetryczna zbioru n-elementowego, jest grupą wszystkich permutacji tego zbioru, w której $\circ$ oznacza składanie permutacji.

D_n, grupa wszystkich izometrii własnych n-kąta foremnego (podgrupa grupy S_n, jako że każda taka izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez pewną permutację wierzchołków n-kąta).

We wstępie do *Campanalogii* Stedman zapowiada wyjaśnienie „sztuki zmian, czysto matematycznej, lecz prowadzącej do zadziwiających efektów". Popatrzmy na dwa przykłady z tej książki.

Jeśli we wspomnianym wyżej Układzie Podstawowym zastąpimy ostatnią zmianę σ_2 przez $\sigma_3 = (3,4)$, to możemy zbudować bicie pełne, zwane *Plain Bob Minimus*, następującej postaci (każda kolumna opisuje jeden układ):

$$\begin{array}{ccc}(1,2,3,4) & (1,3,4,2) & (1,4,2,3)\\(2,1,4,3) & (3,1,2,4) & (4,1,3,2)\\(2,4,1,3) & (3,2,1,4) & (4,3,1,2)\\(4,2,3,1) & (2,3,4,1) & (3,4,2,1)\\(4,3,2,1) & (2,4,3,1) & (3,2,4,1)\\(3,4,1,2) & (4,2,1,3) & (2,3,1,4)\\(3,1,4,2) & (4,1,2,3) & (2,1,3,4)\\(1,3,2,4) & (1,4,3,2) & \underline{(1,2,4,3)}\\ & & (1,2,3,4)\end{array}$$

Pierwsza kolumna to podgrupa D_4 izometrii kwadratu, odpowiadająca Układowi Podstawowemu, druga to warstwa wD_4 dla $w = (\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_3$, natomiast trzecia jest warstwą w^2D_4. Tak więc kolumnowy zapis tego bicia odpowiada podziałowi grupy S_4 na warstwy podgrupy D_4. Zauważmy przy tym, że w każdej kolumnie występują te same zmiany, co w pierwszej (różne są jedynie wyjściowe sekwencje), stąd wszystkie dziedziczą własności pierwszej, a w szczególności są palindromami.

Warstwa (lewostronna) grupy G względem podgrupy H – każdy podzbiór postaci $aH = \{a \circ h : h \in H\}$. Jeśli $aH \neq bH$, to warstwy aH i bH są rozłączne.

Stedman zauważa, że gdy, tak jak przed chwilą, w danym układzie zastąpimy ostatnią zmianę inną, to otrzymamy kolumny o tej

Dokładność metody ^{14}C można poprawić, uwzględniając zmiany stosunku $^{14}C/^{12}C$ w atmosferze spowodowane zmianami intensywności promieniowania kosmicznego, klimatycznymi, itp. Takie cechowanie można przeprowadzić, porównując zmierzony wiek bardzo starych drzew z liczbą słoi w ich przekroju. Najlepiej do tego celu nadają się sosny *pinus aristata longaeva* rosnące w kalifornijskich górach White-Inyo. Najstarszy żywy okaz ma 4764 lata. Porównując zgęszczenia słojów (spowodowane chłodniejszym klimatem) młodszych i starszych drzew możemy tę metodę rozszerzyć do około 10 000 lat.

Pierwotnie zawartość ^{14}C oceniano mierząc intensywność promieniowania. Od lat 80. liczbę atomów ^{14}C ocenia się, wyodrębniając je z próbki za pomocą akceleratora sprzężonego ze spektrometrem masowym. Spektrometr masowy jest to magnes, który pod różnymi kątami odchyla rozpędzone w akceleratorze jony o różnych stosunkach masy i ładunku. Próbka (grafit lub CO_2) jest jonizowana ujemnie (aby uniknąć pomyłki z ^{14}N) przez bombardowanie jonami cezu. Powstałe jony formuje się w wiązkę o energii typowo 25 kiloelektronowoltów i przepuszcza przez spektrometr, który wybiera jony o masie 14: $^{14}C^-$, $^{13}CH^-$, $^{12}CH_2^-$. Wiązka ta jest następnie przyspieszana do energii 1 megaelektronowolta (MeV) i zderzana z cząsteczkami gazu w celu rozbicia $^{13}CH^-$ i $^{12}CH_2^-$. Ostatecznie wiązkę rozpędza się do 8 MeV i spektrometrem wybiera ^{14}C.

Metoda **akceleratorowa** jest dużo czulsza od tradycyjnej, gdyż do pomiaru wykorzystywane są wszystkie atomy ^{14}C z próbki, a nie tylko te, które się aktualnie rozpadają. Pozwala ona sięgać do 40–50 tysięcy lat wstecz. Ograniczeniem jest zwykle czystość próbki. Po 40 000 lat zawartość ^{14}C zmniejsza się do 1%. Tak więc domieszka 1% „nowego" węgla może dowolnie starą próbkę „odmłodzić" do 40 000 lat.

Aby sięgnąć wstecz jeszcze dalej, można zastosować radioizotopy o dłuższych czasach rozpadu. Do oznaczania wieku skamielin wykorzystuje się szereg uranowo-torowy. Uran rozpuszcza się w wodzie, tor nie. Dlatego skały osadowe w momencie tworzenia zawierają uran, a są wolne od toru. Stosunek ^{238}U o $\tau_{1/2} = 4{,}47 \cdot 10^9$ lat do powstałego samej liczbie elementów, a przy tym dwie z nich są albo równe (z dokładnością do kolejności elementów w sekwencji), albo rozłączne. Dziś wiemy, że jest to ogólna własność warstw w grupie. Ponadto dowodząc, że ciąg sekwencji jest istotnie biciem, Stedman korzysta z faktu, że $wx = wy$ implikuje $x = y$, a $w^k x = w^{k+l} y$ pociąga za sobą $x = w^l y$. Z pierwszej własności wynika, że jeśli wszystkie sekwencje w pierwszym układzie są parami różne, to podobnie jest w następnych układach, z drugiej zaś, że także powtórzenia sekwencji mają źródło w pierwszym układzie. Pisze też, że w pełnym biciu „dwa dzwony (lub więcej) pozostają na swoich miejscach tyle razy, ile razy pozostałe dzwony mogą swoje miejsce zmieniać", czyli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między permutacjami n elementów, które są stałe na k spośród nich, a permutacjami $n-k$ elementów.

Kolejnym ważnym wkładem Stedmana do nauki o dzwonach jest kompozycja na 5 dzwonów (uogólniona na dowolną nieparzystą ich liczbę), znana jako „Stedman Doubles". Na początku Stedman rozważa zmiany $\sigma_1 = (1,2)(4,5)$ i $\sigma_2 = (2,3)(4,5)$. Ciągi, odpowiadające słowom $\varphi_1 = (\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1$ i $\varphi_2 = (\sigma_2\sigma_1)^2\sigma_2$ (*wolna szóstka* i *szybka szóstka*), wyznaczają wszystkie permutacje pierwszych trzech dzwonów, przesuwając ostatnie dwa spośród nich w celu zachowania reguł bicia; odpowiada to równości $((1,2)(2,3))^3 = e$ w S_3.

Dalej wprowadza się *zmianę części* $\sigma_3 = (1,2)(3,4)$, by połączyć sąsiednie szóstki (na przemian wolne i szybkie). Każde jej występowanie zmienia zbiór pierwszych trzech dzwonów; otrzymuje się bicie (złożone z 60 sekwencji), odpowiadające równości $(\varphi_1\sigma_3\varphi_2\sigma_3)^5 = e$.

Permutacje σ_1, σ_2 i σ_3 są parzyste, więc generują jedynie grupę alternującą A_5, zatem do otrzymania pełnego bicia wystarczy zastąpić ostatnie σ_3 przez dowolną transpozycję i powtórzyć układ. Odpowiada to podziałowi na warstwy: $S_5 = A_5 \cup \tau A_5$ dla dowolnej transpozycji τ.

Grupa alternująca A_n – podgrupa S_n, złożona ze wszystkich permutacji, które można otrzymać jako złożenie parzystej liczby transpozycji.

Postępując podobnie z siedmioma dzwonami, biorąc dwie szóstki $\sigma_1 = (1,2)(4,5)(6,7)$ i $\sigma_2 = (2,3)(4,5)(6,7)$ i zmianę części $\sigma_3 = (1,2)(3,4)(5,6)$, mamy

$$((\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_3(\sigma_2\sigma_1)^2\sigma_2\sigma_3)^7 = e,$$

czyli układ początkowy z 84 sekwencjami. Aby otrzymać 5040 permutacji, Stedman proponuje zastosowanie $\sigma_4 = (1,2)(3,4)(6,7)$ i $\sigma_5 = (1,2)(3,4)$ zamiast jednego lub obu wystąpień σ_3 w poprzednim wyrażeniu i powtórzenie układu.

Na koniec postawił problem zbudowania pełnego bicia za pomocą jedynie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Dziś oznacza to zbudowanie cyklu Hamiltona w grafie grupy S_7, generowanego przez $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, utworzonego przez oba rodzaje naprzemiennie ustawionych szóstek, połączonych zmianami σ_3 i σ_4.

Cykl Hamiltona – ciąg kolejno połączonych ze sobą krawędzi grafu, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz – z wyjątkiem pierwszego, w którym cykl się zaczyna i kończy.

Problem pozostawał nierozwiązany do 1995 roku, kiedy to rozwiązanie przedstawił zespół muzyczny Towarzystwa Absolwentów Uniwersytetu w Cambridge.

Tłumaczenie W.B.

zeń ^{230}Th pozwala więc określić wiek skamieliny.

Metoda **potasowo-argonowa**, używana do datowania skał bazaltowych, wykorzystuje rozpad ^{40}K o $\tau_{1/2} = 1{,}25 \cdot 10^9$ lat na ^{40}Ar. Argon ulatnia się z roztopionej lawy. W momencie zastygnięcia lawa zawiera ^{40}K, a jest wolna od ^{40}Ar. Zawartość nowo powstałego ^{40}Ar w skale bazaltowej pozwala określić moment jej zastygnięcia.

Najnowocześniejsze metody datowania wykorzystują zjawiska związane z defektami struktur krystalicznych. W niektórych kryształach (kwarc, kalcyt) elektrony mogą być przeniesione z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa dzięki promieniowaniu naturalnemu lub kosmicznemu. Dyfundując, mogą napotkać defekty sieci, w których zostaną uwięzione. Dostarczenie energii do próbki powoduje ich uwolnienie, po którym może nastąpić emisja fotonu. Tego typu emisję nazywamy luminescencją. W metodzie **termoluminescencyjnej** energii dostarcza się, podgrzewając próbkę. Metoda ta mierzy więc czas od ostatniego „wyzerowania" próbki, tj. uwolnienia wszystkich elektronów, co zachodzi w temperaturze powyżej 300°C. Mogło do tego dojść np. podczas rozgrzewania krzemiennego narzędzia w ogniu bądź podczas wypalania wyrobów garncarskich. Im dłuższy czas minął od wyzerowania próbki, tym więcej elektronów w pułapkach, a więc i tym silniejsza luminescencja. W metodzie **wymuszonej fotoluminescencji** elektrony uwalnia się, naświetlając próbkę. Metoda ta jest czulsza od termoluminescencyjnej, gdyż uwalniane są w niej jedynie elektrony z płytszych pułapek i do wyzerowania próbki wystarcza silne nasłonecznienie. Dlatego nadaje się do datowania lessu, wydm, pyłu w lodowcach, dna morskiego itp.

Liczbę elektronów w pułapkach można też mierzyć za pomocą **rezonansu spinowego**. Próbkę umieszcza się w silnym, statycznym polu magnetycznym rzędu 1 tesli, które powoduje rozszczepienie poziomów energetycznych różnych stanów spinowych elektronów. Próbkę poddaje się następnie działaniu mikrofal o częstotliwości rzędu 1 GHz. Rezonansowe pochłanianie energii mikrofal zachodzi, gdy ich częstość odpowiada rozszczepieniu. Metoda ta ma olbrzymie