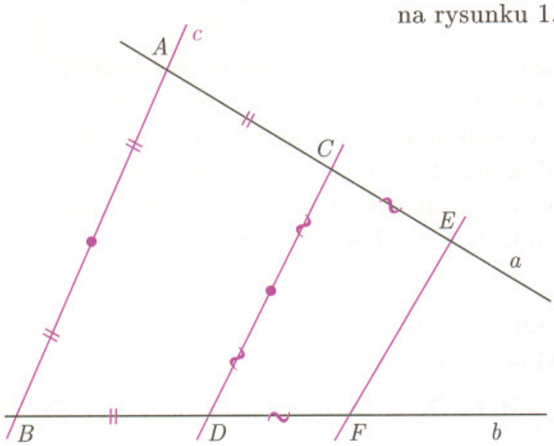
O prostych nierównoległych i nieskończoności

Wiktor BARTOL

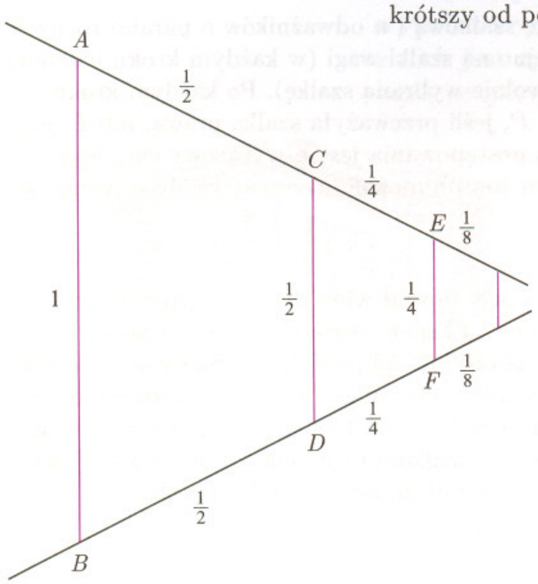
Zachęcony „oszustwami", pleniącymi się na str. 17, chcę przedstawić „dowód", że – wbrew dotychczasowym przypuszczeniom – dwie proste nierównoległe wcale się nie przecinają. Dwie proste, jak wiadomo, nie są równoległe, gdy po przecięciu obu jedną prostą suma kątów jednostronnie wewnętrznych, utworzonych przez te proste z tą, która je przecina, nie jest równa 180°. Weźmy zatem dwie takie proste a i b i przetnijmy je prostą c, tak by utworzone w ten sposób kąty, leżące po jednej stronie c, były ostre, a po drugiej rozwarte, tak jak na rysunku 1.



Rys. 1

Trudno oczekiwać, by proste a i b przecięły się po tej stronie, gdzie znajdują się kąty rozwarte, przyjrzyjmy się zatem temu, co się dzieje po drugiej stronie. Odłóżmy na każdej z prostych a i b odcinek $\frac{AB}{2}$ od punktu A do C i od B do D. Widać, że punkty C i D muszą być różne, gdyż w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy „trójkąt" ABC (czyli ABD), w którym suma dwóch boków byłaby równa trzeciemu. Podobnie nie może istnieć punkt wspólny dla odcinków AC i BD, gdyż znów otrzymalibyśmy „fałszywy trójkąt". Powtarzając taką samą konstrukcję, tym razem dla prostej CD zamiast AB, otrzymamy następną prostą EF (odcinki CE i DF nie przecinają się i nie stykają) – i tak dalej, dowolnie wiele razy. A że za każdym razem posuwamy się o krok dalej wzdłuż prostych a i b, wniosek prosty: a i b nie mają wspólnego punktu.

Tym, którzy chcą sami dociec, gdzie kryje się nieprawda, proponuję teraz przerwanie lektury, jako że zaraz nastąpi rozwikłanie zagadki. Dla ułatwienia obliczeń przyjmijmy, że odcinek AB ma długość 1 jednostki, a kąty BAC i DBA mają po 60° (rys. 2). Wówczas długość każdego z odcinków AC i BD jest równa $\frac{1}{2}$ – i taką samą długość będzie miał odcinek CD. Stąd wynika dalej, że CE, DF oraz EF mają długość $\frac{1}{4}$, następne odcinki odkładane na a i na b mają długość $\frac{1}{8}$, itd. Inaczej mówiąc, każdy kolejny odcinek będzie dwa razy krótszy od poprzedniego. Zastanówmy się teraz, jaką część prostej a (lub b) zajęłyby wszystkie odcinki, gdybyśmy mogli rzeczywiście powtarzać konstrukcję nieskończenie wiele razy? Dodajmy kolejne długości: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ Jak obliczyć taką nieskończoną sumę? Ci, którzy dostrzegli tu szereg geometryczny i wiedzą, jak sobie z nim poradzić, nie będą mieli z tym problemu. My natomiast pokażemy, że w żadnym kroku suma długości otrzymanych odcinków nie przekroczy 1. Rzeczywiście, po pierwszym kroku mamy odcinek, zajmujący na każdej z prostych $\frac{1}{2}$ jednostki. Do pełnej jednostki zostało jeszcze $\frac{1}{2}$. Z tej brakującej $\frac{1}{2}$ pokrywamy w drugim kroku połowę ($\frac{1}{4}$ jednostki), w trzecim – połowę tego, czego brakuje do 1 po poprzednim kroku (czyli $\frac{1}{8}$ jednostki) – i tak dalej: w każdym kroku kolejny odcinek zajmuje dokładnie połowę długości brakującej do 1 jednostki. Inaczej mówiąc, nigdy nie wyjdziemy poza odcinek o długości 1. A przecież prosta jest znacznie dłuższa… Tak więc nasz „dowód" wykazuje jedynie, że punkt przecięcia wybranych dwóch przykładowych prostych leży w odległości nie mniejszej niż 1 od punktu A (lub B).



Rys. 2

Przy okazji okazało się, że suma nieskończenie wielu składników dodatnich może być skończona, ale o tym zapewne wnikliwi Czytelnicy *Delty* wiedzieli już wcześniej.

P.S. Zachęcam Czytelników, którzy usłyszą o paradoksie Zenona o Achillesie i żółwiu, aby zajrzeli jeszcze raz do tego artykuliku.