

Rys. 1

## Najgorsze przybliżenia liczby $\pi$ (3)

**Całka.** Wychodzimy od wzoru  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$ , który

geometrycznie oznacza tyle, że pole pod wykresem funkcji określonej wzorem  $\frac{1}{x^2+1}$  dla  $x$  rzeczywistych dodatnich jest równe  $\frac{\pi}{2}$  (rys. 1).

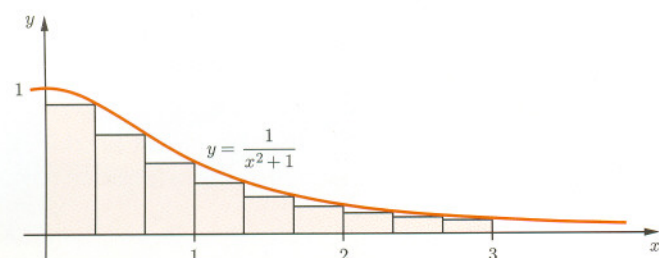
Korzystając z tego, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , dla której całka  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  jest zbieżna, zachodzi równość

$$(3.141) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n^2-1}{n}\right) + f\left(\frac{n^2}{n}\right) \right),$$

otrzymujemy

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left( \frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+4} + \frac{n^2}{n^2+9} + \dots + \frac{n^2}{n^2+(n^2-1)^2} + \frac{n^2}{n^2+n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \frac{1}{n^2+9} + \dots + \frac{1}{n^2+(n^2-1)^2} + \frac{1}{n^2+n^4} \right).$$

Sens geometryczny wzoru (3.141) przedstawiony jest w przypadku  $n = 3$  na rysunku 2.



Rys. 2

Dla  $n = 5$  powyższa suma ma 25 składników i daje przybliżenie będące ułamkiem o 39-cyfrowym liczniku i mianowniku. Jest ono jednak dalekie od doskonałości:  $\pi \approx 2,55439525$ .

Przy  $n = 7$  licznik ma 75 cyfr, a mianownik 74. Przybliżenie  $\pi \approx 2,7177795$  bardziej przypomina  $e$  niż  $\pi$ .

Biorąc  $n = 10$  i sumując 100 wyrazów, otrzymujemy iloraz 181-cyfrowych liczb dający  $\pi \approx 2,84324218$ .

Trójkę przekraczamy dla  $n = 22$ , kiedy to otrzymujemy  $\pi \approx 3,0053852$ . Licznik i mianownik ułamka, który wówczas otrzymujemy, mają po 1118 cyfr.

Przy  $n = 100$  mamy  $\pi \approx 3,111594$ , przy  $n = 200$  wzór daje  $\pi \approx 3,1265928$ , natomiast dla  $n = 300$  po wysumowaniu 90000 ułamków otrzymujemy  $\pi \approx 3,1315927$ . Ostatnie przybliżenie daje aż sześć dobrych cyfr po przecinku. Sześć z pierwszych siedmiu, dodajmy, bo druga cyfra jest błędna, choć pięć następnych jest poprawnych.

JWR

## GRY (15)

Analiza wartości liczb Grundy'ego  $r_G(n)$  zamieszczonych w tabeli poniżej pokazuje, że nasz przeciwnik, który zaczyna grę, ma pozycję wygrywającą. Jego jedynym ruchem wygrywającym jest podział wyjściowego stosu na stosy mające 17 i 20 bierek. Jeżeli, jak poprzednio, przeciwnik zacznie od takiego właśnie ruchu, pozostanie nam liczyć na błąd przeciwnika w dalszej fazie gry.

$n$	$r(n)$	$r_G(n)$
1	0	0
2	0	0
3	1	1
4	0	0
5	2	2
6	1	—
7	0	0
8	2	1
9	1	3
10	0	0

$n$	$r(n)$	$r_G(n)$
11	2	1
12	1	3
13	3	0
14	2	2
15	1	3
16	3	0
17	2	4
18	4	3
19	3	2
20	0	4

$n$	$r(n)$	$r_G(n)$
21	4	3
22	3	0
23	0	4
24	4	3
25	3	0
26	0	4
27	4	5
28	1	0
29	2	3
30	-3	5

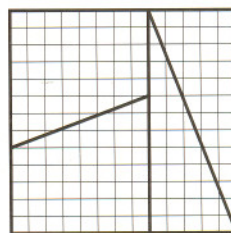
$n$	$r(n)$	$r_G(n)$
31	1	0
32	2	3
33	4	5
34	1	0
35	2	3
36	4	5
37	1	4
38	2	3
39	4	5
40	1	4

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (22)

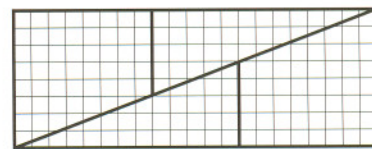
Kwadrat o boku 13 można podzielić na cztery części jak na rysunku 3. Z tych części można złożyć prostokąt o bokach 8 i 21 (rys. 4).

Jak to możliwe, że pole kwadratu jest równe 169, podczas gdy prostokąt ma pole 168?

JWR



Rys. 3



Rys. 4

Korespondencję do  $\Gamma$ -limatiassu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl