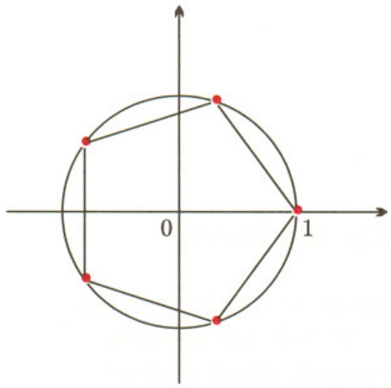
O konstrukcjach wielokątów foremnych

Mikołaj ROTKIEWICZ

Spróbujmy sprecyzować pojęcie konstrukcji geometrycznej. Klasyczna konstrukcja geometryczna polega na tym, że mając *dany* zbiór punktów na płaszczyźnie, znajdujemy nowe punkty w wyniku przecięcia się prostych oraz okręgów „dopuszczalnych". Określenie „dopuszczalne proste" oznacza proste przechodzące przez pewne punkty ze zbioru *danych* punktów, a przez „dopuszczalne" okręgi rozumiemy okręgi o środku w *danym* punkcie i promieniu będącym odległością pewnych dwóch *danych* punktów. W ten sposób rozszerzamy początkowy zbiór *danych* punktów o nowo skonstruowane punkty i bazując na punktach rozszerzonego zbioru, kreślimy nowe okręgi i proste, których punkty przecięcia znów rozszerzają nasz zbiór *danych* punktów itd. Uznamy, że jakiś punkt jest konstruowalny, jeśli po skończonej liczbie kroków punkt ten da się dołączyć do zbioru *danych* punktów.



Aby skonstruować n-kąt foremny, wystarczy znaleźć punkt

$$A_1 = \xi_n = e^{2\pi i/n},$$

gdyż kolejne wierzchołki n-kąta to $A_k = \xi_n^k$, $k = 2, 3, \ldots, n$ (patrz mnożenie liczb zespolonych, str. 1). Oczywiście, $\xi_n^{m_1} = \xi_n^{m_2}$, jeśli $m_1 \equiv m_2 \pmod{n}$.

Na czym więc będzie polegać konstrukcja n-kąta foremnego? Na konstrukcji punktu $\xi_n = e^{2\pi i/n}$. Za początkowy zbiór *danych* punktów przyjmować będziemy zawsze zbiór $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$. Łatwo można wykazać, że jeśli liczby z_1, z_2 są konstruowalne, to również liczby $z_1 z_2$, $z_1 \pm z_2$, z_1/z_2, qz_1, gdzie q jest liczbą wymierną, oraz $\sqrt{z_1}$ są konstruowalne. Zatem jeśli liczby a, b, c są konstruowalne oraz α jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$, to α jest też konstruowalna.

Następujace spostrzeżenie redukuje problem konstruowalności n-kąta foremnego do n będącego liczbą pierwszą. Niech $P(n)$ oznacza zdanie „można skonstruować n-kąt foremny". Wówczas

A. Jeśli $P(n)$, to $P(2n)$.
B. Jeśli liczby m i n są względnie pierwsze oraz $P(n)$ i $P(m)$, to $P(mn)$.
C. Jeśli $n = rk$ i liczby k, r są naturalne oraz $P(n)$, to $P(k)$.

A. Ponieważ ξ_{2n} jest pierwiastkiem równania $x^2 = \xi_n$.
B. Ponieważ wówczas istnieją takie liczby całkowite r, s, że $mr + ns = 1$. Mamy $\xi_{mn} = \xi_{mn}^{mr+ns} = \xi_n^r \xi_m^s$.
C. Ponieważ $\xi_k = \xi_n^r$.

Okazuje się, że jedynymi liczbami pierwszymi n, dla których zachodzi $P(n)$ są tzw. liczby pierwsze Fermata, czyli liczby pierwsze postaci

$$F_k = 2^{2^k} + 1.$$

Dowód tego ładnego twierdzenia Czytelnik może znaleźć w książce M. Bryńskiego *Elementy teorii Galois.*

Dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$ otrzymujemy liczby 3, 5, 17, 257, 65537. Są to jedyne znane liczby pierwsze w ciągu F_k. Wobec powyższego zachodzi

Twierdzenie. $P(n) \iff n = 2^i p_1 p_2 \cdots p_j$, dla pewnych różnych liczb pierwszych Fermata $p_1, \cdots, p_j$ oraz liczb całkowitych $i, j \geq 0$, przy czym gdy $j = 0$, to $i \geq 2$.

Dla przykładu przedstawiamy szkic konstrukcji 17-kąta foremnego, czyli konstrukcji $\xi = \xi_{17}$.

W poniższych rachunkach wykorzystamy fakt, że liczby 3^i, dla $i = 0, 1, \ldots, 15$, dają wszystkie możliwe reszty (oprócz 0) przy dzieleniu przez 17.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3^i mod 17	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

ξ jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego

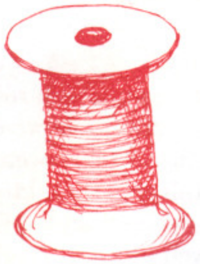
$$(x - \xi^{3^0})(x - \xi^{3^8}) = x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^8})x + 1.$$

Będziemy więc próbowali skonstruować liczbę $\xi^{3^0} + \xi^{3^8}$. Jest ona pierwiastkiem wielomianu

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^8}))(x - (\xi^{3^4} + \xi^{3^{12}})) =$$
$$= x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}})x + \xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}.$$

Bo na przykład $(\xi^{3^8}\xi^{3^{12}} = \xi^{16}\xi^4 = \xi^{20} = \xi^{3^1}$, ponieważ $3^8 \equiv 16 \pmod{17}$ oraz $3^{12} \equiv 4 \pmod{17}$ (patrz tabelka).

Proszę sprawdzić! Liczby $\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}}$ oraz $\xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}$ są



Ciekawą własnością tych rachunków jest to, że nie ulegają one dużej zmianie, jeśli liczbę 3 zastąpimy inną liczbą, która jest tzw. pierwiastkiem pierwotnym modulo 17, na przykład liczbą 10. Mówimy, że a jest pierwiastkiem pierwotnym modulo liczba pierwsza p, jeśli najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą k, taką, że $a^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, jest liczba $k = p - 1$.

odpowiednio pierwiastkami wielomianów

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}}))(x - (\xi^{3^2} + \xi^{3^6} + \xi^{3^{10}} + \xi^{3^{14}})) = \\ = x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \ldots + \xi^{3^{14}})x - 1$$

(proszę sprawdzić!!! wykorzystujemy tutaj równość $\xi^{3^0} + \xi^{3^1} + \ldots + \xi^{3^{15}} = -1$) oraz

$$(x - (\xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}))(x - (\xi^{3^3} + \xi^{3^7} + \xi^{3^{11}} + \xi^{3^{15}})) = \\ = x^2 - (\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \ldots + \xi^{3^{15}})x - 1.$$

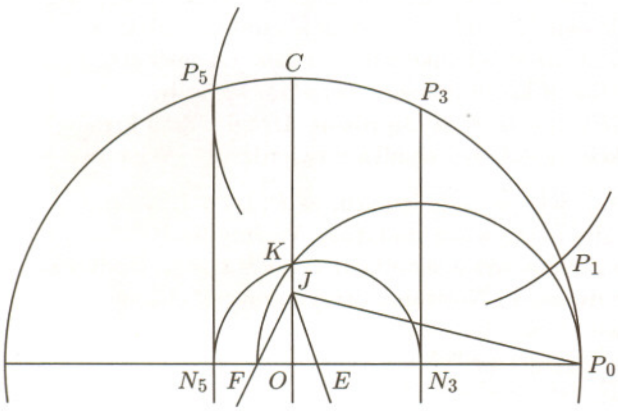
Pozostało skonstruować liczby $\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \ldots + \xi^{3^{14}}$ oraz $\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \ldots + \xi^{3^{15}}$. Są one pierwiastkami wielomianu

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \ldots + \xi^{3^{14}}))(x - (\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \ldots + \xi^{3^{15}})) = \\ = x^2 + x - 4.$$

Mamy jeszcze jeden problem. Którym z pierwiastków, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ czy $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, jest $\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \ldots + \xi^{3^{14}}$? To samo dotyczy poprzednich trójmianów kwadratowych. Czytelnikowi proponujemy przeniesienie powyższej algebraicznej konstrukcji 17-kąta foremnego na papier za pomocą cyrkla i linijki. Powodzenia!

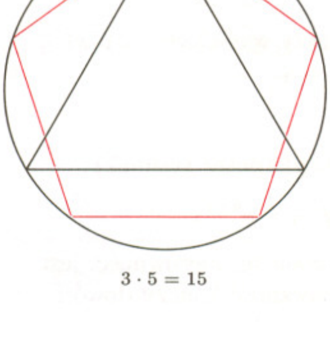
To samo z linijką i cyrklem w ręku

Oczywiście, praktyczne wykonanie konstrukcji siedemnastokąta tymi przyrządami raczej nie powinno odtwarzać krok po kroku rozwiązania algebraicznego. W ten sposób może być krótsze i mieć swój specyficzny wdzięk. Nie znam jednak zdecydowanie zalecającej się prostotą praktycznej konstrukcji. Za najbardziej elegancką uchodzi konstrukcja H.W. Richmonda pochodząca z 1893 roku (prawie stulecie po Gaussie!). Oto ona.



Zaczynamy od nakreślenia dwóch prostopadłych średnic okręgu, w który chcemy wpisać siedemnastokąt (rysunek). Na promieniu OC odkładamy jego jedną czwartą, otrzymując punkt J. Na prostopadłej średnicy znajdujemy taki punkt E, że kąt OJE jest jedną czwartą kąta OJP_0, a następnie taki punkt F, że $\angle FJE = 45°$. Kreślimy teraz półokrąg o końcach P_0 i F – przecina on OC w punkcie K. Teraz z kolei kreślimy półokrąg o środku E przechodzący przez K, otrzymując na średnicy dużego okręgu punkty N_3 (bliżej P_0) i N_5. Wystawione w tych punktach proste prostopadłe do tej średnicy przecinają duży okrąg w punktach P_3 i P_5 (oraz, co jest w dolnej, niewidocznej części rysunku, w punktach P_{14} i P_{12}).

Odkładając jeszcze cięciwę P_3P_5 po przeciwnej stronie P_3, otrzymujemy P_1. Odcinek P_0P_1 to bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w duży okrąg (po drodze znaleźliśmy jeszcze cztery inne jego wierzchołki). Polecam jako trudne zadanie sprawdzenie, że ta konstrukcja jest dobra, jako wskazówkę dając uwagę, że lepiej zajmować się kątami niż odcinkami. Dokładniej: Richmond wykorzystał kilkakrotnie spostrzeżenie, że pierwiastkami równania $x^2 + 2x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha - 1 = 0$ są $\mathrm{tg}\,\alpha$ i $-\mathrm{ctg}\,\alpha$. Oczywiście, mogą istnieć zapewne i inne drogi uzasadnienia tej konstrukcji. Z przyjemnością wydrukujemy zręczny (i niedługi) dowód poprawności tej konstrukcji, o ile tylko ktoś z Czytelników nam go nadeśle.



$3 \cdot 5 = 15$

H.S.M. Coxeter umieszcza po konstrukcji Richmonda zadanie: *skonstruuj cyrklem i linijką 51-kąt.* To już teraz nie jest trudne. Jako wskazówkę dodajmy, że robi się to podobnie, jak konstrukcję 15-, 85- i 255-kąta. Skonstruować 256-kąt jest (oczywiście?) dużo łatwiej. Natomiast konstrukcja 257-kąta jest już znacznie trudniejsza. Wykonali ją Richelot i Schwendenheim (w 1898 roku).

M.K.