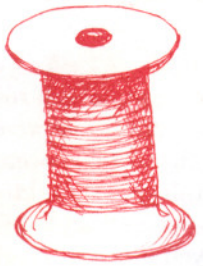


odpowiednio pierwiastkami wielomianów

$$(x-(\xi^{3^0}+\xi^{3^4}+\xi^{3^8}+\xi^{3^{12}}))(x-(\xi^{3^2}+\xi^{3^6}+\xi^{3^{10}}+\xi^{3^{14}}))=$$
$$=x^2-(\xi^{3^0}+\xi^{3^2}+\xi^{3^4}+\ldots+\xi^{3^{14}})x-1$$

(proszę sprawdzić!!! wykorzystujemy tutaj równość $\xi^{3^0}+\xi^{3^1}+\ldots+\xi^{3^{15}}=-1$) oraz

$$(x-(\xi^{3^1}+\xi^{3^5}+\xi^{3^9}+\xi^{3^{13}}))(x-(\xi^{3^3}+\xi^{3^7}+\xi^{3^{11}}+\xi^{3^{15}}))=$$
$$=x^2-(\xi^{3^1}+\xi^{3^3}+\xi^{3^5}+\ldots+\xi^{3^{15}})x-1.$$

Pozostało skonstruować liczby $\xi^{3^0}+\xi^{3^2}+\xi^{3^4}+\ldots+\xi^{3^{14}}$ oraz $\xi^{3^1}+\xi^{3^3}+\xi^{3^5}+\ldots+\xi^{3^{15}}$. Są one pierwiastkami wielomianu

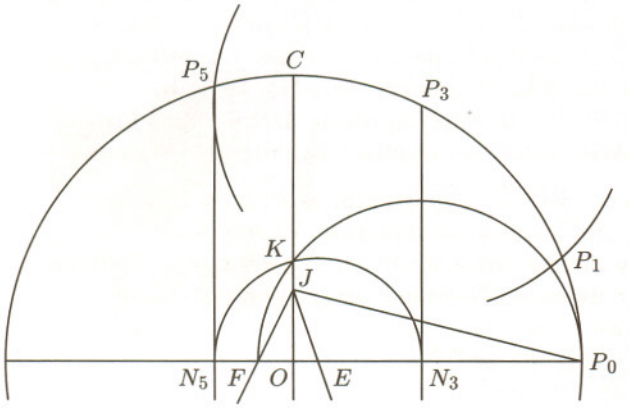
$$(x-(\xi^{3^0}+\xi^{3^2}+\xi^{3^4}+\ldots+\xi^{3^{14}}))(x-(\xi^{3^1}+\xi^{3^3}+\xi^{3^5}+\ldots+\xi^{3^{15}}))=$$
$$=x^2+x-4.$$

Ciekawą własnością tych rachunków jest to, że nie ulegają one dużej zmianie, jeśli liczbę 3 zastąpimy inną liczbą, która jest tzw. pierwiastkiem pierwotnym modulo 17, na przykład liczbą 10. Mówimy, że a jest pierwiastkiem pierwotnym modulo liczba pierwsza p, jeśli najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą k, taką, że $a^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, jest liczba $k=p-1$.

Mamy jeszcze jeden problem. Którym z pierwiastków, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ czy $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, jest $\xi^{3^0}+\xi^{3^2}+\xi^{3^4}+\ldots+\xi^{3^{14}}$? To samo dotyczy poprzednich trójmianów kwadratowych. Czytelnikowi proponujemy przeniesienie powyższej algebraicznej konstrukcji 17-kąta foremnego na papier za pomocą cyrkla i linijki. Powodzenia!

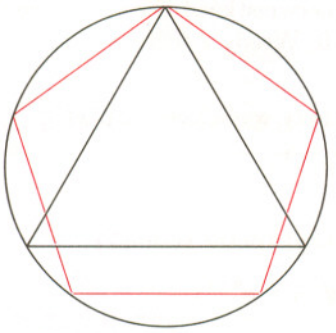
To samo z linijką i cyrklem w ręku

Oczywiście, praktyczne wykonanie konstrukcji siedemnastokąta tymi przyrządami raczej nie powinno odtwarzać krok po kroku rozwiązania algebraicznego. W ten sposób może być krótsze i mieć swój specyficzny wdzięk. Nie znam jednak zdecydowanie zalecającej się prostotą praktycznej konstrukcji. Za najbardziej elegancką uchodzi konstrukcja H.W. Richmonda pochodząca z 1893 roku (prawie stulecie po Gaussie!). Oto ona.



Zaczynamy od nakreślenia dwóch prostopadłych średnic okręgu, w który chcemy wpisać siedemnastokąt (rysunek). Na promieniu OC odkładamy jego jedną czwartą, otrzymując punkt J. Na prostopadłej średnicy znajdujemy taki punkt E, że kąt OJE jest jedną czwartą kąta OJP_0, a następnie taki punkt F, że $\angle FJE = 45°$. Kreślimy teraz półokrąg o końcach P_0 i F – przecina on OC w punkcie K. Teraz z kolei kreślimy półokrąg o środku E przechodzący przez K, otrzymując na średnicy dużego okręgu punkty N_3 (bliżej P_0) i N_5. Wystawione w tych punktach proste prostopadłe do tej średnicy przecinają duży okrąg w punktach P_3 i P_5 (oraz, co jest w dolnej, niewidocznej części rysunku, w punktach P_{14} i P_{12}).

Odkładając jeszcze cięciwę P_3P_5 po przeciwnej stronie P_3, otrzymujemy P_1. Odcinek P_0P_1 to bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w duży okrąg (po drodze znaleźliśmy jeszcze cztery inne jego wierzchołki). Polecam jako trudne zadanie sprawdzenie, że ta konstrukcja jest dobra, jako wskazówkę dając uwagę, że lepiej zajmować się kątami niż odcinkami. Dokładniej: Richmond wykorzystał kilkakrotnie spostrzeżenie, że pierwiastkami równania $x^2+2x\operatorname{ctg}2\alpha-1=0$ są $\operatorname{tg}\alpha$ i $-\operatorname{ctg}\alpha$. Oczywiście, mogą istnieć zapewne i inne drogi uzasadnienia tej konstrukcji. Z przyjemnością wydrukujemy zręczny (i niedługi) dowód poprawności tej konstrukcji, o ile tylko ktoś z Czytelników nam go nadeśle.



$3 \cdot 5 = 15$

H.S.M. Coxeter umieszcza po konstrukcji Richmonda zadanie: *skonstruuj cyrklem i linijką 51-kąt.* To już teraz nie jest trudne. Jako wskazówkę dodajmy, że robi się to podobnie, jak konstrukcję 15-, 85- i 255-kąta. Skonstruować 256-kąt jest (oczywiście?) dużo łatwiej. Natomiast konstrukcja 257-kąta jest już znacznie trudniejsza. Wykonali ją Richelot i Schwendenheim (w 1898 roku).

M.K.