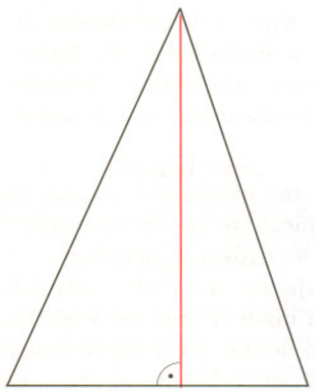
Budujemy teorię

Jak rodzi się teoria? Z obserwacji, z pytań, niekiedy z olśnienia; zauważamy pewne fakty, pytamy o przyczyny, konsekwencje, uogólnienia, szukamy związków, wyciągamy wnioski. Nie jest jasne, czy miała tę świadomość trójka młodych ludzi (nazwijmy ich A, B i C), bawiąca się, przyznajmy, dość nietypowo…

A: – Rozwiązując dzisiaj zadanie, narysowałem trójkąt z wysokością spuszczoną na jeden z jego boków i wiecie, co zauważyłem?

B i C spojrzeli zachęcająco.

A: – Wysokość podzieliła trójkąt (rys. 1) na dwa trójkąty prostokątne! To znaczy, że każdy trójkąt można tak podzielić: na dwa trójkąty prostokątne!



Rys. 1

B: – Ale to dlatego, że narysowałeś trójkąt ostrokątny, a gdybyś narysował rozwartokątny, to wysokość wcale nie przecinałaby boku trójkąta, tylko jego przedłużenie – i co wtedy?

Zasępili się nieco i zaczęli myśleć. Pierwsza ocknęła się C.

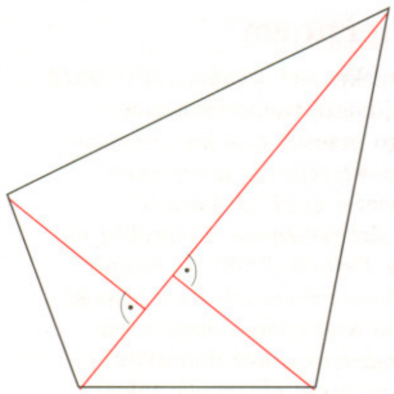
C: – Słuchajcie, przecież w trójkącie rozwartokątnym zawsze jest wysokość, która trafia w bok trójkąta, a nie w jego przedłużenie. Chyba nawet mogłabym spróbować to wykazać.

Cała trójka zasiadła nad kartką papieru; rysowali, kreślili, aż wymyślili (*domyślasz się, Czytelniku, do czego doszli?*).

B: – Wygląda na to, że mamy coś w rodzaju twierdzenia: *Każdy trójkąt można podzielić na dwa trójkąty prostokątne.*

C uśmiechnęła się filuternie.

C: – A przecież trójkąt prostokątny można podzielić nawet na … jeden trójkąt prostokątny!



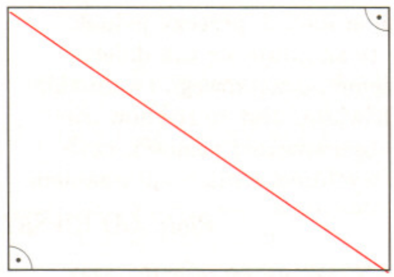
Rys. 2

A i B nie stracili rezonu. Uzgodnili, że to tylko szczególny przypadek, a żeby było dobrze dla dowolnego trójkąta, to trzeba wziąć dwa trójkąty prostokątne. Już mieli się zabrać za coś innego, gdy A postanowił wykazać się dociekliwością.

A: – To znaczy, że n-kąt można podzielić na $n-1$ trójkątów prostokątnych? No bo dla trójkąta tak jest: ma trzy boki, a da się go podzielić na dwa trójkąty prostokątne.

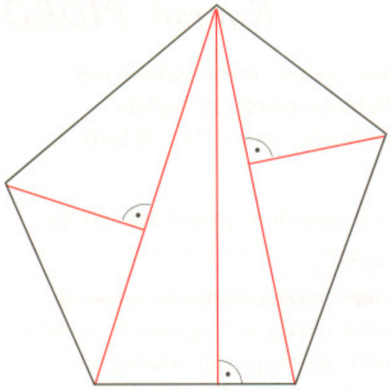
Znowu wyciągnęli kartki i zaczęli sprawdzać. Tym razem pierwszy odezwał się B.

B: – Popatrzcie, mam czworokąt, w którym żaden kąt nie jest prosty, i nie umiem go podzielić na trzy trójkąty prostokątne. Ale na cztery (rys. 2) już umiem!



Rys. 3

Co prawda, kwadrat albo nawet prostokąt potrafię podzielić na zaledwie dwa takie trójkąty, ale to pewnie też szczególne przypadki (rys. 3)?



Rys. 4

Okazało się, że A i C też doszli do podobnych wniosków. C zaczęła mieć pewne podejrzenia, ale wolała ich jeszcze nie zdradzać.

C: – A jak będzie dla pięciokątów? Bo na razie jest dziwnie: dowolny trójkąt można podzielić na dwa trójkąty prostokątne (o jeden mniej niż liczba boków), a, jak się wydaje, czworokąty potrzebują co najmniej czterech takich trójkątów (tyle samo, ile liczba boków).

Po chwili wszyscy mieli już rysunek z pięciokątem podzielonym na … sześć trójkątów prostokątnych (rys. 4); oczywiście domyślili się, że nie warto rysować figury, która miałaby kąt prosty przy wierzchołku, bo to byłby z pewnością „szczególny przypadek”.

A: – I co teraz? Ani mniej, ani tyle samo, tylko więcej trójkątów niż boków!

C uznała, że czas wyjawić swoje przypuszczenia.

C: – Popatrzcie na mój rysunek pięciokąta. Narysowałam przekątne, wychodzące z jednego wierzchołka, a każdy z otrzymanych trójkątów podzieliłam na dwa prostokątne. I wyszło mi sześć.

B: – Już wiem! W takim razie można tak samo zrobić w dowolnym n–kącie! Narysować wszystkie przekątne, wychodzące z jednego, dowolnego wierzchołka, policzyć trójkąty, a potem każdy z nich podzielić na dwa trójkąty prostokątne. Zaraz, to ile będzie tych trójkątów wyznaczonych przez przekątne, które potem będziemy dzielić na dwa prostokątne? Na pewno o jeden więcej niż przekątnych…

Pochylili się nad kartkami i po krótkim czasie wiedzieli już, ile przekątnych wychodzi z jednego wierzchołka n–kąta (*ile, drogi Czytelniku?*). Teraz poszło już łatwo. C podsumowała:

C: – Mamy następne twierdzenie: *Każdy n-kąt można podzielić na* $2(n-2)$ *trójkąty prostokątne.* Może to gdzieś opublikujemy?

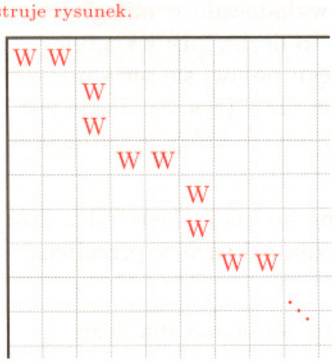
B ucieszył się z pomysłu, ale A znowu nie dał się ponieść ogólnej radości.

A: – Najpierw musimy zapisać dowód naszego twierdzenia, to po pierwsze. Po drugie, wszystkie nasze wielokąty były wypukłe, a przecież istnieją też inne. A po trzecie, mam jeszcze tyle pytań, że wcale mi się nie wydaje, byśmy stworzyli już jakąś teorię. Na przykład: co będzie z wielokątami niewypukłymi? Czy liczba $2(n-2)$ jest naprawdę najmniejsza? Może można w inny sposób podzielić każdy wielokąt na mniej trójkątów prostokątnych? A jak opisać te „szczególne przypadki”? Czy można stworzyć podobne twierdzenia dla brył trójwymiarowych? A gdyby rozważać trójkąty o innej własności niż posiadanie kąta prostego? I co będzie, gdy…

Niestety, B i C zniknęli z pola widzenia. Może poszli szukać odpowiedzi na te pytania?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Rozwiązanie zadania M 955.
Załóżmy, że na szachownicy $n \times n$ rozstawiono k wież tak, że każda z nich jest bita co najwyżej jeden raz. Na każdym polu, na którym stoi wieża, piszemy liczbę 0. W każdym wierszu wykonamy następującą operację: jeśli w danym wierszu stoją dwie liczby, to do każdej z nich dodamy 1, jeśli zaś jedna liczba, to dodamy 2 (z wierszem bez wpisanych liczb nie robimy nic). Analogiczną operację wykonujemy następnie na wszystkich kolumnach. Jasne jest, że w rezultacie na każdym polu, gdzie stoi wieża, napisana jest albo liczba 3, albo 4. Dlatego suma S wszystkich napisanych liczb jest nie mniejsza niż $3k$. Z drugiej strony do każdej kolumny i każdego wiersza dodaliśmy w sumie liczbę 2, a więc suma S jest nie większa niż $4n$. Stąd $3k \leq S \leq 4n$, czyli $k \leq \frac{4n}{3}$. Ponieważ k jest liczbą naturalną, więc $k \leq \left[\frac{4n}{3}\right]$. Optymalny sposób rozmieszczenia wież ilustruje rysunek.



⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Kwadrat można podzielić na skończoną liczbę mniejszych kwadratów tak, by każdy z nich był innej wielkości. Pierwszy taki podział – na 55 kwadratów – uzyskano w 1938 roku (Sprague). Obecnie znany jest podział na 21 różnych kwadratów i wiadomo, że na mniej się nie da (Duivjestijn, 1978). Natomiast podział sześcianu na skończoną liczbę mniejszych sześcianów, z których każdy byłby inny, jest niemożliwy.