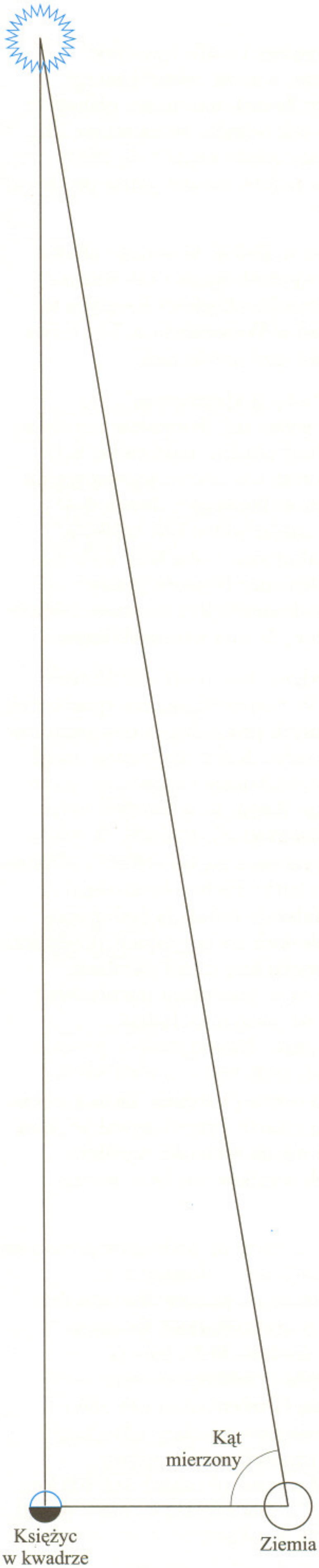

Ile do Słońca?

Próbę odpowiedzi na to pytanie podjął wspomniany już Arystarch. Dokładniej, była to próba stwierdzenia, jaki jest stosunek odległości Słońca do odległości Księżyca od Ziemi. Idea pomiaru tego stosunku jest tak prosta jak geometria trójkąta (patrz rysunek).

W kwadrze płaszczyzna księżycowego terminatora (granicy między półkulą oświetloną i nieoświetloną) przechodzi przez Ziemię, inaczej mówiąc – przy Księżycu jest kąt prosty (z definicji kwadry). Wystarczy więc zmierzyć kątową odległość Księżyca od Słońca i secans tego kąta (czyli odwrotność cosinusa) to właśnie poszukiwany stosunek odległości. Kłopot w tym, że moment kwadry można uchwycić tylko w przybliżeniu, a mierzony kąt jest w tej sytuacji również niemal prosty i mały błąd jego pomiaru daje duży błąd secansa. Nic więc dziwnego, że Arystarchowi wyszło, że Słońce jest 20 razy dalej od Księżyca, podczas gdy powinno być 400. Przy ówczesnej technice pomiarowej Arystarch mógł równie dobrze ocenić mierzony kąt na nieco większy od 90°. Ciekawe, co wtedy by zrobił, bo – mówiąc dzisiejszym językiem – secans takiego kąta jest przecież ujemny. Dużo później Kepler przyjmował jako stosunek odległości Słońca i Księżyca liczbę 60, jednak bez jakiegoś uzasadnienia. Dopiero w końcu XVII w. udało się uzyskać poprawny wynik.

Tu od razu warto uświadomić sobie, że bezpośredni pomiar paralaksy geocentrycznej Słońca, nawet dzisiejszymi środkami technicznymi, jest niewykonalny. Trzeba by wszak wyznaczyć kątową odległość między położeniami Słońca widzianego z dwóch miejsc na Ziemi, a do tego trzeba mieć gwiaździste tło, tymczasem gdy widać Słońce, to na pewno nie widać gwiazd. Toteż dobrego pomiaru odległości Słońca dokonano wyznaczając odległość innego obiektu (o czym też już w *Delcie* było). Mianowicie w 1672 r. francuscy astronomowie na podstawie pomiarów wykonanych w Paryżu i w Cayenne w Gujanie Francuskiej wyznaczyli paralaksę geocentryczną (a więc odległość) Marsa. Nie było to specjalnie trudne, gdyż Marsa doskonale widać na tle gwiazd, a ponadto jest niezbyt odległy od Ziemi. I teraz najważniejsze: w owych czasach mechanika nieba umożliwiała już teoretyczne obliczenie stosunków wszystkich wzajemnych odległości planet i planet od Słońca na dowolną chwilę. Inaczej mówiąc – konfiguracje wszystkich najważniejszych ciał Układu Słonecznego były doskonale znane z dokładnością do podobieństwa. Wystarczyło więc wyznaczyć absolutną odległość dowolnego obiektu, a Mars był do tego najwygodniejszy, aby dostać wszystkie odległości w kilometrach. Dużo później, bo na początku XX w., w tej samej metodzie wykorzystano Erosa, który zbliża się czasem do Ziemi na zaledwie 22 mln km, a więc jego paralaksę jeszcze łatwiej wyznaczyć. Ale to już tylko szczegóły techniczne.

Tak została określona chyba najważniejsza w astronomii jednostka długości (odległości), czyli średnia odległość Ziemi od Słońca nazwana jednostką astronomiczną. Mierzy ona 149,6 mln km, czemu odpowiada paralaksa geocentryczna $8''\!,80$. Światło pokonuje tę odległość w 499 s. Jest bardzo wygodną jednostką w granicach Układu Słonecznego, gdyż wszystkie odległości wyrażają się liczbami co najwyżej dwucyfrowymi.

T.K.

Rozwiązanie zadania M 969.
Wykażemy, że szukaną liczbą jest $k=\frac{1}{2}$. Podnosząc stronami do kwadratu równanie rekurencyjne ciągu (a_n), otrzymujemy $a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$. Jasne jest również, że $a_n\geq 1$. Możemy więc napisać $a_n^2+2\leq a_{n+1}^2$. Wynika stąd, że $1+2(n-1)\leq a_n^2$, czyli $2-\frac{1}{n}\leq\frac{a_n^2}{n}$. Dalej, mamy $a_n^2=a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2}+2=a_{n-2}^2+\frac{1}{a_{n-2}^2}+\frac{1}{a_{n-1}^2}+4=\ldots=a_1^2+\left(\frac{1}{a_1^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)+2(n-1)$, czyli po podzieleniu przez n: $\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)+2\frac{n-1}{n}$. Wiemy już, że ciąg $\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$ jest zbieżny do 0. Wynika z tego, że ciąg $b_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)$ jest również zbieżny do zera (to jest „prawie" ciąg średnich arytmetycznych wyrazów ciągu $\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$). Tak więc $\left(\frac{a_n^2}{n}\right)$ jest zbieżny do 2. Jasne jest teraz, że szukana liczba k jest równa $\frac{1}{2}$, a szukana granica jest równa $\sqrt{2}$.