mała delta

## Urodzeni pod dobrą datą

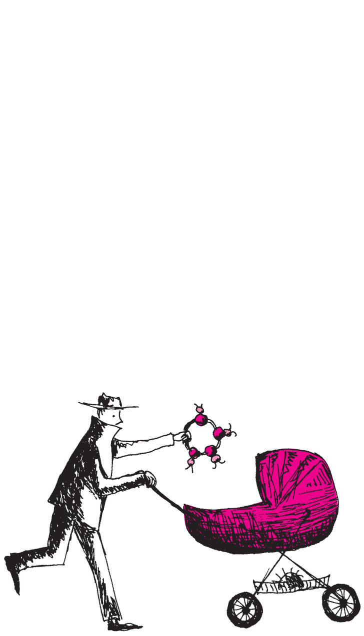
Urodziłem się 24 maja pewnego odległego roku i bardzo się cieszę, gdy spotykam ludzi urodzonych tego samego dnia (mniejsza o rok). Jaką mam szansę na takich natrafić w grupie, powiedzmy, 30 przypadkowo dobranych osób? Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia się w niej jeszcze co najmniej jednej osoby urodzonej 24 maja?

Dla uproszczenia obliczeń przyjmiemy, że rok ma zawsze 365 dni, a każdy z tych dni jest tak samo prawdopodobnym dniem urodzenia dowolnej osoby (przecież nie znamy prawdziwych dat!). Inaczej mówiąc, dla każdej osoby prawdopodobieństwo tego, że urodziła się ona 24 maja, jak i dowolnego innego ustalonego dnia, jest równe $\frac{1}{365}$, natomiast prawdopodobieństwo, że urodziła się w dniu innym niż 24 maja, jest równe $\frac{364}{365}$.

Umawiamy się, że gdy wszystkie pojedyncze zdarzenia (zwane elementarnymi) są równie prawdopodobne, prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia złożonego ze zdarzeń elementarnych jest stosunek liczby takich zdarzeń, które spełniają nasze oczekiwania, do liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych. Na przykład, prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby parzystej na sześciennej kostce jest równe $\frac{1}{2}$, gdyż mamy trzy możliwe wyniki parzyste (2, 4 i 6), a wszystkich możliwych wyników jest sześć.

Zacznijmy zatem od sprawdzenia szans na to, że nikt w 30-osobowej grupie nie urodził się 24 maja – oprócz mnie. Każdy z pozostałych 29 członków grupy spełnia ten warunek z prawdopodobieństwem $\frac{364}{365}$, a prawdopodobieństwo, że spełnią go wszyscy jednocześnie, jest równe iloczynowi tych prawdopodobieństw, czyli $(\frac{364}{365})^{29}$, co jest w przybliżeniu równe 0,92. W takim razie prawdopodobieństwo, że chociaż jedna osoba urodziła się tego samego dnia co ja, jest równe 0,08. Mała szansa!

A jaka jest szansa, że jakiekolwiek dwie (co najmniej) osoby z 30-osobowej, przypadkowo dobranej grupy urodziły się tego samego dnia, już niekoniecznie 24 maja? Podobnie jak poprzednio, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, a więc tego, że każda z tych osób urodziła się innego dnia. Jak to się może zdarzyć? Pierwsza osoba (nie ma znaczenia, którą uznamy za pierwszą, którą za drugą itd.) mogła się urodzić dowolnego z 365 dni (365 możliwości), druga powinna była się urodzić w jeden z pozostałych 364 dni (364 możliwości), trzecia miałaby do wyboru już tylko 363 możliwości, wreszcie trzydziestej zostałoby już do dyspozycji tylko 336 dni. Taki układ można otrzymać na $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 337 \cdot 336$ sposobów, natomiast wszystkich możliwych układów dni urodzin jest $365^{30}$. W takim razie prawdopodobieństwo tego, że wszyscy członkowie grupy będą mieli różne dni urodzin, jest równe



$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 337 \cdot 336}{365^{30}},$$

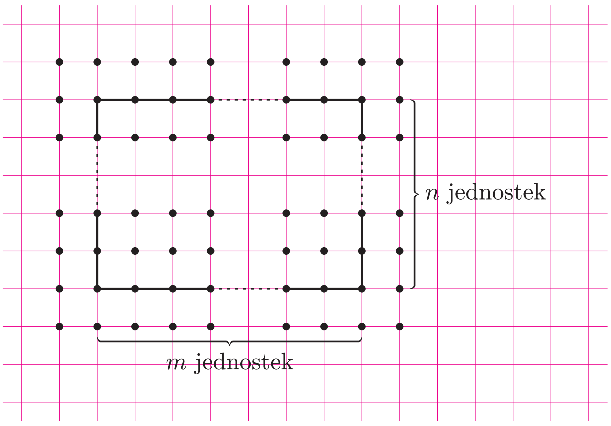
a to w przybliżeniu 0,2936. Tak więc prawdopodobieństwo znalezienia się dwóch osób z tym samym dniem urodzin, wynosi nieco ponad 0,7! Duża szansa! Nietrudno obliczyć, podobnie jak to zrobiliśmy tu dla 30 osób, że już w grupie 23-osobowej prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch osób urodzonych tego samego dnia jest większe od $\frac{1}{2}$.

# Pole w kropkach

Obliczanie pól wielokątów nie zawsze bywa czynnością lekką i przyjemną. Są jednak sytuacje, kiedy do ustalenia pola dowolnego wielokąta, wypukłego lub wklęsłego, wystarczy umiejętność dodawania, dzielenia przez dwa i… dobry wzrok.

Wyobraźmy sobie, że na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych każdy punkt, którego obie współrzędne są całkowite, zaznaczamy kropką. Otrzymujemy w ten sposób kratę pokrywającą całą płaszczyznę (dlatego te punkty nazwiemy punktami *kratowymi*), w której każde dwa sąsiednie punkty leżące na jednej prostej równoległej do osi (jednej lub drugiej) są oddalone o jedną jednostkę.

Narysujmy prostokąt o bokach równoległych do osi i o wierzchołkach w punktach kratowych.




Rys. 1

Oczywiście jego pole jest równe $mn$, co oznacza, że prostokąt składa się z $mn$ pojedynczych kwadracików o boku 1. Znajdźmy liczbę tych kwadracików nieco inaczej, przyporządkowując kwadracikowi np. jego górny prawy róg. Każdy punkt kratowy znajdujący się wewnątrz prostokąta jest prawym górnym rogiem pewnego kwadracika, więc mamy kwadracików co najmniej

$$(m-1)(n-1).$$

Z kolei spośród punktów kraty leżących na obwodzie prostokąta prawymi górnymi rogami kwadracików są tylko te, które znajdują się na prawym i górnym boku prostokąta – oprócz prawego dolnego i lewego górnego wierzchołka – a tych jest

$$m+n-1.$$

Razem jest ich zatem

$$(m-1)(n-1)+m+n-1=mn.$$

Wszystko się zgadza, co nie powinno dziwić. Nieco dziwniejsze może się wydać to, że w podobny sposób można obliczyć pole dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach kraty. Dokładniej, jeśli $w$ oznacza liczbę wewnętrznych punktów kratowych wielokąta, $b$ liczbę punktów kratowych leżących na jego obwodzie, a

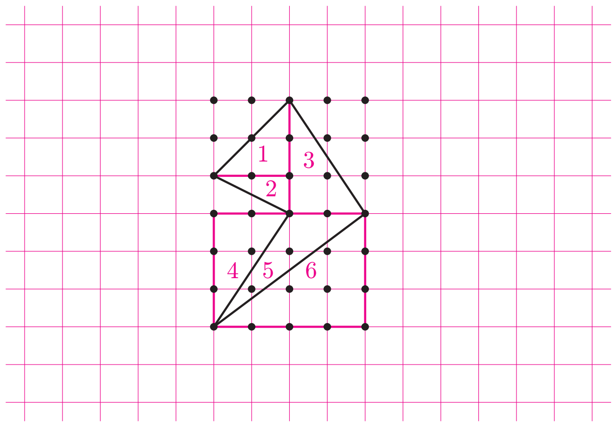
$$w+\frac{b}{2}-1$$

nazwiemy *liczbą kropkową* tego wielokąta, to mamy twierdzenie (Picka):

*Pole wielokąta jest równe jego liczbie kropkowej.*

Aby się o tym przekonać, zauważmy dwa fakty.

- Po pierwsze, jeśli jakiś wielokąt można rozbić na kilka mniejszych (też o wierzchołkach w punktach kratowych), to jego liczba kropkowa jest sumą liczb kropkowych jego składowych. (Co się dzieje z punktami kratowymi, należącymi do dwóch sąsiednich wielokątów składowych?) W szczególności możemy stąd wywnioskować, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równoległych do osi (gdyż każdy taki trójkąt jest połową odpowiedniego prostokąta).
- Po drugie, każdy wielokąt możemy „wymodelować”, składając lub odejmując trójkąty prostokątne, jak na rysunku.




Rys. 2. Pole wielokąta $= P_1 + P_2 + P_3 + P_{4+5+6} - P_4 - P_6$.

A do czego jest potrzebny dobry wzrok? Żeby nie przegapić żadnej kropki!

*Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL*