Rozwiązanie zadania F 590.
Jeśli pręt porusza się z prędkością v, to także ciecz, ponieważ nieściśliwa, przecieka między prętem a ściankami naczynia, w przeciwną stronę niż pręt, z prędkością u. Przy czym $S_1 v = S_2 u$, a więc $\pi r^2 v = \pi(R^2 - r^2)u$, stąd $u = vr^2/(R^2 - r^2)$. Prędkość u cieczy jest jednakowa wszędzie, oprócz niewielkiego obszaru koło końców pręta. Ale jeśli spełniony jest warunek $l \gg r$, to wkład tych cząstek do całkowitej energii można zaniedbać.
Z zasady zachowania energii przy pionowym ruchu pręta zachodzi

$$\rho_2 \pi r^2 l v^2/2 + \rho_1 \pi (R^2 - r^2) l u^2/2 = $$
$$= (\rho_1 - \rho_2)\pi r^2 l g h.$$

Stąd

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}},$$

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{g\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}.$$

Rozwiązanie zadania M 1017.
Niech $\overline{0, a_1 a_2 \ldots}$ będzie zapisem dziesiętnym 3^{-100}.
Wówczas

$$10^{m-1} \cdot 3^{-100} = \overline{\ldots, a_m a_{m+1} \ldots},$$

więc $0 < r = 10^{m-1} \bmod 3^{100} < 3^{100}$ spełnia $r \cdot 3^{-100} = \overline{0, a_m a_{m+1} \ldots}$ oraz $[10^9 \cdot r \cdot 3^{-100}] = \overline{a_m a_{m+1} \ldots a_{m+8}}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Wystarczy zatem uzasadnić, że istnieje liczba r postaci $10^k \bmod 3^{100}$ spełniająca

$$123456789 < r\frac{10^9}{3^{100}} < 123456789 + 1.$$

Wykażemy, że

$$(*) \quad \{10^k \bmod 3^{100} : k \in \mathbb{N}\} =$$
$$= \{1 \leqslant l < 3^{100} : l \equiv 1 (\bmod 9)\}.$$

Ponieważ $\frac{10^9}{3^{100}} < \frac{1}{9}$, więc $(*)$ zapewni nam istnienie takiej liczby r . Oczywiście

$$10^k \bmod 3^{100} \equiv 1 (\bmod 9).$$

Inkluzja w drugą stronę wynika z następującej obserwacji:

$$(**) \quad 3^{n+1} | 10^{3^{n-1}} - 1, \text{ ale}$$
$$3^{n+2} \nmid 10^{3^{n-1}} - 1,$$

którą można łatwo udowodnić przez indukcję.
Dla takich liczb a, n, że $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$, oznaczmy przez

$$\mathrm{ord}_n(a) = \min\{i \in \mathbb{N} : a^i \equiv 1 (\bmod n)\}.$$

Z obserwacji $(**)$ wynika, że

$$10^{3^{98}} \equiv 1 (\bmod 3^{100}),$$

skąd $\mathrm{ord}_{3100} 10 | 3^{98}$, ale z tej samej obserwacji $\mathrm{ord}_{3100} 10 \neq 3^s$ dla $s < 98$. Zatem $\mathrm{ord}_{3100} 10 = 3^{98}$ i zbiory po obu stronach równości $(*)$ mają po tyle samo (3^{98}) elementów, co kończy dowód.

Patrz w niebo

Błysk meteoru na niebie to oznaka, że do ziemskiej atmosfery wpadła niewielka bryłka skalna lub metaliczna, która wskutek wielkiej prędkości uległa stopieniu, spaleniu i rozproszeniu na niezuważalny pył. Taki zazwyczaj jest los bryłek (ciał meteorowych, meteoroidów) wpadających do atmosfery, bowiem ich prędkość jest rzeczywiście ogromna i wyraża się w dziesiątkach kilometrów na sekundę. W sprzyjających okolicznościach prędkość meteoroidu (względem Ziemi) może być nie tak wielka, choćby wtedy, gdy jego ruch jest zbieżny z ruchem Ziemi. Okruch taki może przetrwać lot przez atmosferę i może zostać potem znaleziony jako meteoryt. Na lądzie nie jest łatwo odróżnić meteoryt od zwykłych kamieni – pozaziemskie pochodzenie bryłki stwierdza się w wyniku laboratoryjnych badań mineralogicznych. Za to kosmiczne pochodzenie kamienia jest praktycznie stuprocentowo pewne, gdy znajdzie się go w sterylnych lodach Antarktydy lub Grenlandii, gdyż ziemskich kamieni nie ma prawa tam być. W każdym razie dla każdego meteoroidu droga przez atmosferę jest zawsze niebezpieczna i spotkanie z Ziemią najczęściej owocuje zniszczeniem go w wysokiej temperaturze wywołanej tarciem o atmosferę.

Tymczasem 22 marca 1998 na małą mieścinę Monahans w Teksasie spadły dwa meteoryty wielkości pięści – zdarza się – z których jeden niedaleko grupy dzieci grających w koszykówkę – też nic w tym osobliwego. Meteoryty wkrótce powędrowały do laboratorium NASA, gdzie stwierdzono rzecz mocno osobliwą, mianowicie obecność w nich bardzo drobnych (uwaga!) kropelek ciekłej wody. Kropelki te tkwiły w kryształkach niemal czystej soli, które znajdowano już w innych meteorytach. Czy z badań soli i samej wody wyniknie coś ważnego, to już inna sprawa, w każdym razie jest absolutnie niezwykłe, że skoro meteoroidy na ogół spalają się doszczętnie podczas przelotu przez atmosferę, w tym egzemplarzu nawet woda ocalała!

Tomasz KWAST

Luty

W lutowe wieczory wzrok przyciąga oczywiście Orion i otaczające go bardzo jasne gwiazdy: Aldebaran w Byku, Procjon w Małym Psie i Syriusz w Wielkim Psie. Przez ten obszar nieba przechodzi także Droga Mleczna, co w sumie stwarza widok wyjątkowo piękny. Na południe od Oriona leży Zając, a jeszcze dalej Gołąb – gwiazdozbiór bardzo niepozorny, w dodatku którego jedynie północna część wyłania się zimą spod horyzontu w naszej szerokości geograficznej – jest więc w Polsce właściwie nieznany. Warto jednak wiedzieć, że w tym gwiazdozbiorze znajduje się obłok ciemnej materii międzygwiazdowej, który dawni badacze obarczali odpowiedzialnością za wystąpienie epoki lodowej. Pomysł ten wziął się zapewne stąd, że Słońce wraz z układem planetarnym porusza się (względem gwiazd okolicznych) w kierunku Herkulesa, a Gołąb leży dość dokładnie w przeciwnej stronie nieba. Można było więc przypuszczać, że kiedyś Układ Słoneczny mógł przechodzić przez obłok w Gołębiu, a wtedy wskutek przesłonięcia Słońca przez materię obłoku mogło nastąpić globalne ochłodzenie Ziemi. Obecnie uważa się, że przyczyna zlodowaceń nie jest aż tak kosmiczna, że mianowicie powoduje je ruch płyt kontynentalnych i wynikające stąd zmiany cyrkulacji wód oceanicznych.

Wenus jest w Strzelcu, a Mars w Wężowniku i obie te planety wschodzą nad ranem. Saturn jest w Byku i widać go w pierwszej połowie nocy, a Jowisz w Raku, przez co widać go przez całą noc – 2 II jest jego opozycja, czyli znajduje się wtedy po przeciwnej stronie Ziemi co Słońce. 4 II największą kątową odległość od Słońca osiągnie Merkury, dzięki czemu można próbować szukać go nad ranem we wschodniej części nieba. 1 II wypada nów Księżyca, a 17 II pełnia. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych obiektów w lutym nie będzie.

T. K.