Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2003

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 467, 468

Redaguje Marcin E. KUCZMA

467. Czy istnieje wielomian $P(x,y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych, o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb dodatnich?

468. W niemalejącym ciągu a_1, a_2, a_3, … o wyrazach naturalnych każda liczba naturalna k występuje dokładnie k razy. Podać wzór jawny, przedstawiający n-ty wyraz a_n jako funkcję zmiennej n, wyrażającą się przez działania arytmetyczne, potęgi/pierwiastki oraz symbol $\lfloor x \rfloor$ (część całkowita liczby x).

Zadanie **468** zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2003

Przypominamy treść zadań:

463. Wyznaczyć największą możliwą długość linii łamanej zamkniętej o następujących własnościach:

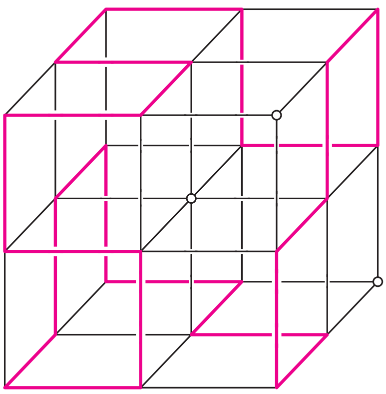
- wierzchołki łamanej są różnymi punktami przestrzeni $\mathbb{R}^3$, których współrzędne należą do zbioru $\{0,1,2\}$;
- każde dwa sąsiednie boki łamanej są prostopadłe i mają długość 1.

464. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, a proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Dowieść, że

$$|AP|\cdot|BP|\cdot|CP| \geqslant 8\cdot|PD|\cdot|PE|\cdot|PF|.$$

463. Punkty o współrzędnych równych 0 lub 2 są wierzchołkami sześcianu Q o krawędzi długości 2. Na każdej z dwunastu krawędzi tego sześcianu może leżeć co najwyżej jeden bok rozważanej łamanej $Ł$ (co wynika z warunku prostopadłości sąsiednich boków). Każdy wierzchołek sześcianu Q, który jest wierzchołkiem łamanej $Ł$, jest końcem dwóch jej boków leżących na krawędziach sześcianu Q. Stąd wniosek, że łamana $Ł$ może przechodzić przez co najwyżej sześć wierzchołków sześcianu Q, omijając co najmniej dwa z nich.

To pokazuje, że spośród 27 punktów o współrzędnych 0, 1, 2 nie więcej niż 25 punktów może być wierzchołkami łamanej $Ł$. Każdy jej bok łączy dwa punkty, z których jeden ma sumę współrzędnych parzystą, a drugi nieparzystą. Liczba boków (czyli długość $Ł$) musi zatem być parzysta, skoro łamana jest zamknięta. Tak więc długość łamanej $Ł$ nie przekracza 24.



Jest to szukane maksimum, bowiem istnieje łamana o długości 24, spełniająca postawione warunki. Przykład jest pokazany na rysunku.

464. Oznaczmy pola trójkątów ABC, PBC, PCA, PAB odpowiednio przez S, S_a, S_b, S_c oraz przyjmijmy

$$x = \frac{S_a}{S}, \quad y = \frac{S_b}{S}, \quad z = \frac{S_c}{S};$$

$$x+y+z=1;$$

liczby x, y, z to *współrzędne barycentryczne* punktu P w trójkącie ABC. Ich średnia harmoniczna nie przekracza średniej arytmetycznej, równej $1/3$. Zatem

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 9.$$

Zachodzą proporcje:

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AD|-|PD|}{|PD|} = \frac{|AD|}{|PD|} - 1 = \frac{S}{S_a} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

i analogicznie

$$\frac{|BP|}{|PE|} = \frac{1-y}{y}, \qquad \frac{|CP|}{|PF|} = \frac{1-z}{z}.$$

Wobec tego

$$\frac{|AP|}{|PD|}\cdot\frac{|BP|}{|PE|}\cdot\frac{|CP|}{|PF|} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} =$$

$$= \frac{1-(x+y+z)+(yz+zx+xy)-xyz}{xyz} =$$

$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} - 1 \geqslant 8$$

i mamy dowodzoną tezę.

Zadania z fizyki nr 364, 365

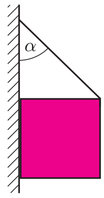
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2003

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
455 ($WT = 1{,}66$) i **456** ($WT = 2{,}97$)
z numeru 2/2003

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	37,40
Michał Adamaszek	– Kęty	33,39
Michał Jóźwikowski	– Błonie	33,32

364. Jednorodny sześcian wisi na nici, dotykając ściany (rys. 1). Nić tworzy ze ścianą kąt α. Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego sześcianu o ścianę, aby było to możliwe?

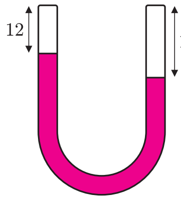


Rys. 1

365. Rurka o kształcie litery U o obu końcach zatopionych zawiera rtęć oraz dwie objętości gazu (rys. 2). W pozycji pionowej (gdy gaz był na górze), długości słupów gazu wynosiły 12 cm i 18 cm. Gdy rurkę odwrócono o 180° bez zmiany temperatury, długość pierwszego słupa gazu spadła do 6 cm, przy czym słup rtęci nie uległ przerwaniu.

a) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurkę położyć poziomo, a temperatura pozostanie niezmieniona?

b) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurka pozostanie w pozycji wyjściowej, a temperatura wzrośnie z początkowej wartości 20° C do 80° C?



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2003

Przypominamy treść zadań:

360. Ocenić orientacyjnie maksymalną prędkość łodzi o długości 10 m, szerokości 2 m i masie 2 t, jeśli napędzający ją silnik rozwija moc 50 kW.

361. Według ogólnej teorii względności gwiazda odchyla przebiegające w jej pobliżu promienie świetlne. Odchylenie to można analizować, przyjmując, że na zewnątrz gwiazdy o masie M w odległości r od jej środka współczynnik załamania przestrzeni wynosi $n = 1 + \frac{2a}{r}$, gdzie $a = GM/c^2$ (M – masa gwiazdy, G – stała grawitacji). Obliczyć kąt odchylenia promienia przebiegającego tuż obok Słońca. Jeśli źródło światła jest bardzo odległe, to czy czas zwłoki (nadwyżka czasu przejścia promienia, wynikająca z jego spowolnienia w polu grawitacyjnym) ma skończoną wartość? Masa Słońca wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg, średnica $1{,}4 \cdot 10^6$ km.

360. Oznaczmy przez N siłę nośną działającą na łódź wskutek odrzucania w dół strumienia wody. Ciężar łodzi należy przyrównać do sumy N i siły wyporu, równej iloczynowi gęstości wody ρ przez przyspieszenie ziemskie, długość łodzi i pole pionowego przekroju części zanurzonej S. Po podstawieniu wartości liczbowych w układzie SI otrzymujemy równanie

$$2 \cdot 10^4 = N + 10^5 \cdot S.$$

Praca silnika przechodzi w energię kinetyczną wody – częściowo „rozpychanej” przez kadłub łodzi, a częściowo odrzucanej do tyłu i wprawianej w ruch wirowy przez śrubę. Załóżmy, że te części są równe, a więc połowę mocy silnika przyrównamy do $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_w^2$, gdzie v_w jest prędkością wody „rozpychanej” przez łódź. Przyjmijmy, że ta prędkość jest równa 1/3 prędkości łodzi v, natomiast $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ przyrównamy do iloczynu $\rho S v$. Podstawienie wartości liczbowych daje drugie równanie

$$Sv^3 = 450.$$

Aby oszacować siłę nośną, przyjmijmy, że daje do niej wkład połowa rozpatrywanej wyżej ilości wody (czyli połowa jest odrzucana przez łódź w dół). Zatem

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v \, \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 167 \, v^2 S.$$

Po wyeliminowaniu N i S z układu równań otrzymujemy równanie trzeciego stopnia

$$0{,}2 = \frac{0{,}75}{v} + \frac{450}{v^3}.$$

Otrzymana wartość prędkości v wynosi 14,5 m/s $\approx$ 15 m/s. Oznacza to, że 26% ciężaru łodzi jest równoważone przez siłę nośną, a 74% – przez siłę wyporu. Pominięcie siły nośnej zmniejszyłoby obliczoną prędkość do 13,1 m/s. Podana szerokość łodzi nie odegrała w powyższych obliczeniach istotnej roli.

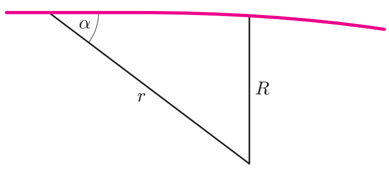
361. Różniczkując prawo załamania, stwierdzamy, że promień przechodzący od ośrodka o współczynniku załamania n do ośrodka o współczynniku załamania $n + \mathrm{d}n$ i padający na powierzchnię graniczną pod kątem α zmienia kierunek o

$$\mathrm{d}\alpha = (\mathrm{d}n/n) \operatorname{tg} \alpha.$$

Ponieważ odchylenie promienia jest bardzo małe, więc wartość kąta α w tym wzorze możemy podstawić tak, jakby promień biegł po prostej (rysunek), tzn.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

(R – odległość największego zbliżenia, czyli promień Słońca).



Podstawiamy

$$n \approx 1, \qquad \mathrm{d}n = \frac{2\alpha}{r^2}\mathrm{d}r$$

(mniejsza o znaki, oczywiście promień odchyla się w stronę Słońca) i obliczamy całkę

$$\Delta\alpha = 2\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = 4\alpha R \int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{4\alpha}{R} = 1{,}75''.$$

Czas zwłoki na drodze $\mathrm{d}s$ wynosi

$$\mathrm{d}t = (\mathrm{d}s/\mathrm{c})(n-1) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{c}\cos\alpha}(n-1)$$

i nietrudno sprawdzić, że całka jest rozbieżna w nieskończoności.