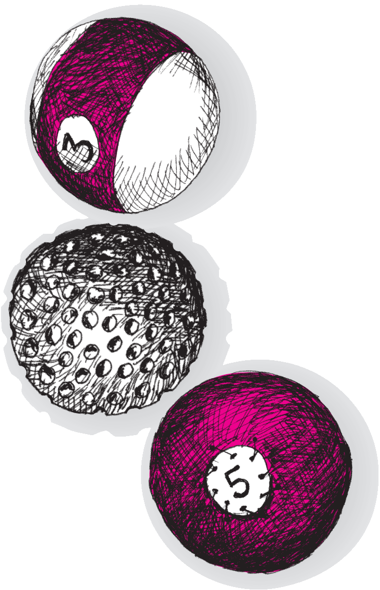

Jeśli chodzi o istnienie trajektorii okresowych w dowolnym wypukłym bilardzie, to mamy następujące twierdzenie G. D. Birkhoffa.

Dla dowolnych naturalnych liczb względnie pierwszych p i q, takich że $p < q$, istnieją co najmniej dwie trajektorie bilardu o okresie q obiegające brzeg p razy.

Dowód opiera się na obserwacji, że powyższe trajektorie realizują odpowiednio maksimum i minimum obwodu q-boku wpisanego w Ω o zadanej **liczbie obrotu** $\frac{p}{q}$. Gdy $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, to maksymalna orbita odpowiada średnicy Ω, a minimalna – szerokości Ω.

Innym intrygującym problemem jest pytanie o miarę Lebesgue'a zbioru trajektorii okresowych. Przypuszcza się, że nie istnieje sytuacja, gdy trajektorie okresowe o ustalonym okresie q lokalnie tworzą dwuparametrową rodzinę (zapełniają otwarty podzbiór X). Tak nie jest, gdy brzeg wypukłego bilardu jest krzywą analityczną; można to objaśnić efektem rykoszetu (im bliżej brzegu leży trajektoria, tym częściej się odbija). Gdy okres $q = 2$, to łatwo zobaczyć, że takie trajektorie mogą tworzyć rodzinę co najwyżej 1-parametrową (gdy Ω ma stałą szerokość). M. Rychlik udowodnił, że trajektorie okresowe o okresie $q = 3$ tworzą zbiór miary zero; wykorzystywał przy tym pewne dosyć skomplikowane tożsamości trygonometryczne. Dla $q \geqslant 4$ problem jest otwarty.

Ważną klasę stanowią tzw. **bilardy rozpraszające**, których brzeg składa się z wklęsłych kawałków. Ich badanie zapoczątkował J. G. Sinaj. Motywację stanowiła hipoteza ergodyczna gazu sztywnych kul w prostopadłościennym pudełku, a dwuwymiarowe wklęsłe bilardy stanowią pierwsze (chociaż nadal odległe) przybliżenie układu fizycznego.

Okazało się, że bilardy rozpraszające dają piękne przykłady chaotycznych układów dynamicznych. Charakteryzują się one tzw. **strukturą hiperboliczną**; oznacza to, że w pewnych kierunkach w przestrzeni fazowej trajektorie rozchodzą się wykładniczo szybko po długim czasie, a w innych kierunkach trajektorie zbliżają się do siebie wykładniczo szybko. Ponadto trajektorie okresowe są gęste w przestrzeni fazowej i odpowiednia liczba $f(N)$ zachowuje się jak e^{hN} przy $N \to \infty$, gdzie h jest **entropią** układu, oraz bilardy te są ergodyczne.

Własność hiperboliczności nie jest wyłączna dla bilardów rozpraszających. L. Bunimowicz wykazał, że bilard typu stadion (rysunek poniżej) jest hiperboliczny.

M. Wojtkowski objaśnił to zjawisko, posługując się prawami optyki geometrycznej. Otóż kierunki wykładniczego rozchodzenia się trajektorii odpowiadają specjalnym pękom rozchodzących się trajektorii (promieni). Po odbiciu taki pęk może się jeszcze bardziej rozproszyć (na wklęsłym kawałku brzegu) lub może się skurczyć. Chodzi o to, aby kontrolować skupianie się pęków przy odbiciach. Dlatego też stadion nie może być zbyt długi.

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1051. Danych jest n liczb ($n \geqslant 3$) z przedziału $(0, 1]$, takich że przy dowolnym podziale tych liczb na dwie grupy suma liczb w przynajmniej jednej grupie jest nie większa niż 1. Wyznaczyć najmniejszą liczbę M_n, taką że suma wszystkich n liczb jest nie większa niż M_n.
Rozwiązanie na str. 16

M 1052. Niech $w_n(t) = \frac{1}{2^n}[(t + \sqrt{t^2 - 4})^n + (t - \sqrt{t^2 - 4})^n]$. Wykazać, że $w_n(w_m(t)) = w_m(w_n(t))$ dla każdego t.
Rozwiązanie na str. 16

M 1053. Wykazać, że $w_p(p)$ (patrz poprzednie zadanie) jest liczbą całkowitą podzielną przez p dla dowolnej liczby pierwszej p.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 613. Oszacować odległość między dwoma sąsiednimi punktami światłoczułymi znajdującymi się w ludzkim oku.
Rozwiązanie na str. 3

F 614. Celofanowy balonik dziecięcy został napełniony gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze tego powietrza balonik będzie się unosił?
Rozwiązanie na str. 14