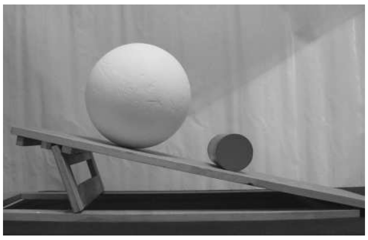
O kulach i walcach niestaczających się z równi

Lech NOWICKI,[*] Jacek JAGIELSKI[*]

Podczas trzynastej edycji *Fête de la Science* demonstrowaliśmy kule i walce o zaskakującej własności: położone na równi pochyłej nie staczały się z niej, lecz po wykonaniu kilku drgań nieruchomiały. Na fot. 1 pokazano walec i kulę spoczywające na nachylonej powierzchni.

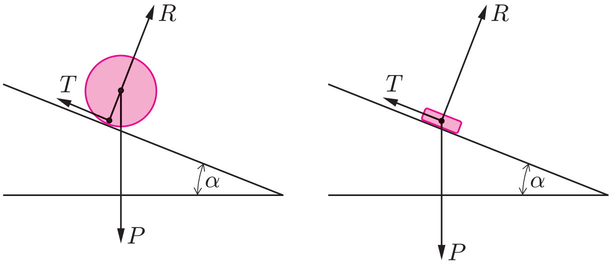


Fot. 1. Styropianowa kula i drewniany (pomalowany) walec spoczywające na równi pochyłej.

Za pomocą równi pochyłej i piłki do gry w koszykówkę lub w ping-ponga łatwo jest sprawdzić, że zazwyczaj już przy bardzo niewielkim kącie nachylenia α piłka, którą położono na równi, stacza się. Niecodzienny widok kuli, która pozostaje na równi w spoczynku, budził zdziwienie widzów. Przygotowane przez nas kule i walce nie staczały się z równi nawet wówczas, gdy kąt α przekraczał 20°. Widzom odwiedzającym nasze paryskie „ogrodowe" laboratorium zadawaliśmy pytanie: *Jak to możliwe, by kula leżała nieruchomo na pochyłości?* Zachęcaliśmy do stawiania hipotez i do eksperymentowania, w szczególności do obserwacji zachowania się dziwnych kul i walców przy próbach wprawienia ich w ruch lub utrzymania w spoczynku, nie tylko na równi pochyłej. Nie ukrywając faktu, że dziwnie zachowujące się bryły zostały przez nas specjalnie przygotowane, nie pozwalaliśmy jednak na zajrzenie, co kryją w swych wnętrzach.

Piłka na równi

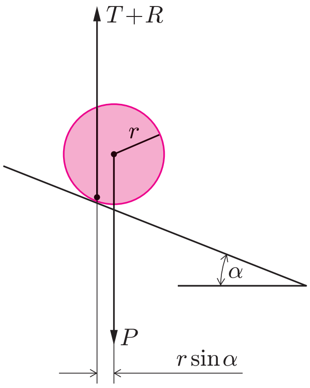
Przeanalizujmy siły działające na piłkę, dzięki którym stacza się ona po równi pochyłej (rys. 1). Ziemia przyciąga piłkę siłą grawitacji P. Oddziaływanie równi na piłkę opisujemy za pomocą siły tarcia T, skierowanej wzdłuż równi w górę, oraz siły reakcji sprężystej R skierowanej prostopadle do równi, również ku górze. Siły T i R przyłożone są do piłki w miejscu jej zetknięcia z równią. Czy możliwe jest, by trójka działających na piłkę sił: P, T i R zapewniała jej równowagę? Wynik prostego doświadczenia, w którym piłkę kładziemy na pochyłości, sugeruje, że nie ma takiej możliwości. Wiemy jednak, że jeśli zamiast piłki umieścimy na równi prostopadłościenny klocek, to działające nań siły P, T i R będą się równoważyć. Na przykład zwykła gumka do wycierania, położona na pochyłej deseczce, pozostaje nieruchoma nawet przy kącie nachylenia bliskim 45°. Gdy gumka jest w równowadze, siła ciężkości P jest zrównoważona wypadkową sił T i R. Gdy zwiększyć kąt nachylenia równi, gumka zacznie się zsuwać, gdyż siła tarcia statycznego nie może przekroczyć pewnej wartości.



Rys. 1. Siły działające na piłkę (a) i na klocek (b), które położono na równi pochyłej. Piłka nie jest w stanie równowagi.

A dlaczego w przypadku piłki jest inaczej? Czemu piłka na równi nie jest w równowadze? Aby wyjaśnić ten fakt, musimy odwołać się do pojęcia momentu siły. Aby ciało rozciągłe, tj. takie, którego rozmiarów nie zaniedbujemy, było w równowadze, spełnione być muszą dwa warunki:
Suma sił działających na ciało jest równa zeru.
Suma momentów sił działających na ciało jest równa zeru.

Skoro zwykła piłka nie ma na równi położeń równowagi, to najwidoczniej nie jest możliwe jednoczesne spełnienie obu warunków. Istotnie, jeśli przyjąć założenie, że spełniony jest pierwszy z nich, dotyczący sił, to można wykazać, że nie jest spełniony drugi. Niech $P + T + R = 0$, czyli $P = -(T + R)$. Oznacza to, że siły P i $(T + R)$ stanowią parę sił, tzn. układ sił o równoległych kierunkach, równych wartościach i przeciwnych zwrotach. Jak pokazano na rysunku 2, siły te działają wzdłuż równoległych prostych, których odległość wynosi $r \sin\alpha$, gdzie r to promień kuli. Suma momentów tych sił wynosi $Pr\sin\alpha$ i jest różna od zera (przyjmujemy, że $r > 0$ i $\alpha > 0$). Tak więc na piłkę, którą położono na równi, działają siły, które nie zapewniają stanu równowagi. W konsekwencji piłka stacza się pod wpływem działającego na nią momentu sił.



Rys. 2. Jeśli $P = -(T + R)$, to siły P i $(T + R)$ stanowią parę sił, której moment jest równy $Pr\sin\alpha$.

Hipotezy

Widzowie uczestniczący w imprezie stawiali rozmaite hipotezy, usiłując wyjaśnić utrzymywanie się kul i walców na pochyłości. Najczęściej sugerowano, że zastosowane zostały magnesy. Wysuwano również inne przypuszczenia: że kula jest naelektryzowana, lub że zawiera specjalny gaz. Sugerowano nawet, że we wnętrzu kuli zamknięto jakieś zwierzę! Wiele z tych hipotez udało się doświadczalnie odrzucić.

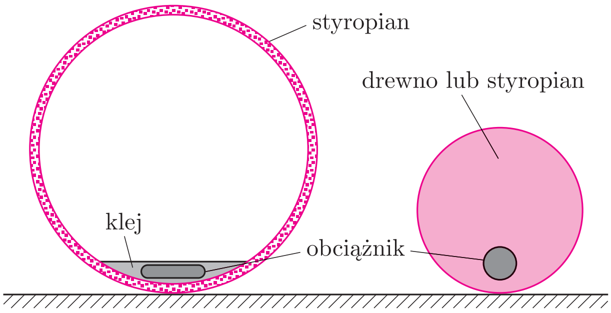
Widzowie namawiani przez nas do wykonywania następnych doświadczeń z walcami i kulami spostrzegali,

[*]Instytut Problemów Jądrowych

że walec położony nieruchomo na płaskim podłożu wykonuje drgania, tocząc się raz w jedną, raz w drugą stronę. Najbardziej widowiskowe doświadczenie polegało na próbie utrzymania styropianowej kuli na poziomo wyciągniętej dłoni. Eksperymentatorzy odczuwali na własnej skórze, że ta sama kula, która pozostaje nieruchoma na równi, stacza się z poziomo położonej podpory, jaką stanowi dłoń. Najczęściej to właśnie doświadczenie naprowadzało eksperymentatorów na właściwy ślad. Domyślano się wówczas lub stwierdzano: jedna połowa kuli jest cięższa od drugiej.

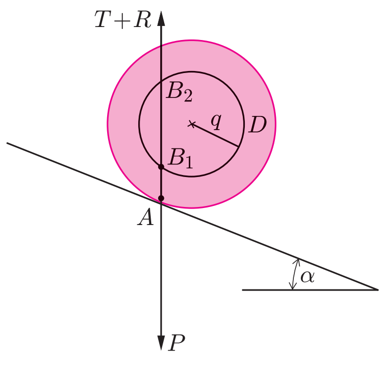
Niejednorodne bryły

Najwyższy czas wyjawić, na czym polegał użyty trick sprawiający dziwne zachowanie się kul i walców: bryły te nie były jednorodne. Pojedynczą kulę wytwarzano, sklejając dwie półkuliste czasze. Jednakże przed sklejeniem do wewnętrznej ścianki jednej z nich przymocowywano ołowiany obciążnik. W sklejonej już kuli obciążnik znajdował się w znacznym oddaleniu od środka kuli (rys. 3), a środek ciężkości tak wytworzonej bryły leżał w pewnej odległości q od jej środka geometrycznego (odległość tę nazywamy mimośrodem). W podobny sposób przesunięto środek ciężkości walca: kawałek ołowiu umieszczono wewnątrz walca, w pewnej odległości od jego osi. Obciążniki zawarte w bryłach pozostawały niewidoczne dla widza.



Rys. 3. Budowa kuli i walca z przesuniętymi środkami ciężkości.

Walec położono na równi pochyłej tak, że jego oś pozostawała pozioma. Na rys. 4 pokazano przekrój walca dokonany płaszczyzną równoległą do podstaw. Widoczny okrąg D o promieniu q stanowi zbiór wszystkich punktów, w których może znaleźć się środek ciężkości walca leżącego w ten sposób na równi.



Rys. 4. Siły działające na walec z przesuniętym środkiem ciężkości, położony na równi. Walec jest w stanie równowagi trwałej.

Wyjaśnijmy, dlaczego przesunięcie środka ciężkości walca może zapewnić stabilność walca na równi.

Zauważmy, że gdy mimośród jest odpowiednio duży, to środek ciężkości może znaleźć się dokładnie nad punktem podparcia A. Ściślej: istnieją wówczas dwa punkty okręgu D, znajdujące się nad punktem A; oznaczono je B_1 i B_2. Położenia walca, w których jego środek ciężkości leży w jednym z tych punktów, są stanami równowagi. Zauważmy, że w obu stanach równowagi siły P i $(T+R)$ działają wzdłuż tej samej prostej i w rezultacie suma momentów tych sił jest równa zeru, jeśli tylko siły te mają jednakową wartość.

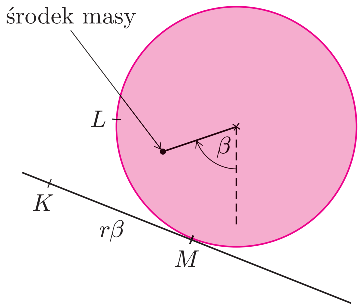
Szukając ekstremów energii

Gdy zwykła kulka toczy się po nierównej powierzchni, zajmuje w końcu jakiś dołek, dążąc do zajęcia położenia o najmniejszej energii potencjalnej. Egzemplifikacja tego prawa na przykładzie walca (lub kuli) z przesuniętym środkiem ciężkości jest szczególnie pouczająca.

Energetyczne rozważania zacznijmy jednak od zwykłego jednorodnego walca (lub jednorodnej kuli). Przyjrzyjmy się, jak zmienia się grawitacyjna energia potencjalna E tej bryły toczącej się po równi bez poślizgu. Kąt β, który tworzy z pionem pewna ustalona średnica walca (rys. 5), przyjmiemy za parametr opisujący jego położenie. Niech w chwili początkowej $\beta = 0$ i $E = 0$. Przy założeniu, że pole grawitacyjne jest jednorodne, energię potencjalną E oddziaływania ciała z Ziemią wyrazimy wzorem

$$(1) \qquad E(\beta) = mgh = -(mgr\sin\alpha)\cdot\beta,$$

gdzie g jest wartością natężenia ziemskiego pola grawitacyjnego, a wysokość h wyznaczamy w odniesieniu do poziomu, na którym znajdował się środek walca w chwili początkowej. (Uwaga: Kąt β wyrażamy w radianach, a droga, jaką przebywa środek walca przy obrocie o kąt β, wynosi $r\beta$). Zauważmy, że funkcja $E(\beta)$ jest liniowa, co związane jest z faktem, że w rozważanym przypadku środek masy walca pozostaje w niezmiennej odległości r od powierzchni równi.



Rys. 5. Określenie kąta β. Gdy $\beta = 0$, punkty K i L pokrywają się, a środek masy jest w najniższym punkcie okręgu D (rys. 4).

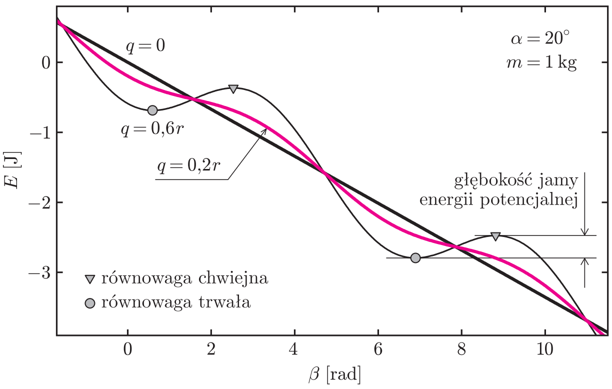
Zależność $E(\beta)$ komplikuje się, gdy środek ciężkości walca jest przesunięty, czyli gdy $q > 0$. Jeśli założyć, że w chwili początkowej środek ten znajdował się w najniżej położonym punkcie okręgu D, to czysto geometryczne związki prowadzą do wzoru: $h = -(r\beta\sin\alpha + q\cos\beta)$, i w konsekwencji

$$(2) \qquad E(\beta) = -mg(r\beta\sin\alpha + q\cos\beta) = -mgr\left(\beta\sin\alpha + \frac{q}{r}\cos\beta\right).$$

Zauważmy, że oprócz wyrazu występującego we wzorze

(1) wzór (2) zawiera dodatkowy człon proporcjonalny do cosinusa kąta β, więc okresowo zmienny.

Przedstawmy wykres funkcji $E(\beta)$ dla konkretnych przykładów różniących się wartościami ilorazu q/r. Przyjmijmy: $m = 1$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2, $r = 10$ cm, $\alpha = 20°$ oraz trzy wartości mimośrodu: $q = 0$ cm (tj. walec z nieprzesuniętym środkiem ciężkości), 2 cm oraz 6 cm. Na rys. 6 przedstawiono wykresy odpowiadające tym przypadkom. Dla pierwszego z nich liniowa funkcja $E(\beta)$ nie ma żadnego ekstremum ani punktu przegięcia, nie ma więc także położenia równowagi. Gdy $q = 2$ cm, $q/r = 0{,}2$, a funkcja $E(\beta)$, choć nieliniowa, pozostaje monotoniczna i nadal brak jest położenia równowagi. Jednakże w trzecim rozważanym przypadku $q/r = 0{,}6$, a funkcja $E(\beta)$ ma minima (oznaczone na rys. 6 kółkami) i maksima (oznaczone trójkątami). Wartościom kąta β, przy których występują te ekstrema, odpowiadają stany równowagi.



Rys. 6. Zależność grawitacyjnej energii potencjalnej E od kąta β dla walca lub kuli nieślizgających się po równi.

Stan równowagi, w którym $E(\beta)$ przybiera lokalne minimum, jest stanem równowagi trwałej. W położeniu tym środek ciężkości walca znajduje się w punkcie B_1 (rys. 4), a fakt ten można sprawdzić doświadczalnie, zaznaczając położenie środka ciężkości na jednej z podstaw walca. Trwałość równowagi oznacza, że walec, odchylony nieznacznie od tego położenia, zmierza do stanu, z którego został wytrącony. Jeśli jednak wychylenie będzie zbyt duże, to walec podąży ku innemu położeniu równowagi trwałej. Obszar otaczający minimum energii potencjalnej nazywamy czasem jamą energii potencjalnej. Im jest ona głębsza, tym więcej energii trzeba, by wyprowadzić ciało ze stanu równowagi. W przypadku walca z przesuniętym środkiem ciężkości głębokość (i szerokość) jamy można w pewnych granicach regulować przez zmianę kąta α. Na przykład, gdy $\alpha = 0$ (równia pozioma), głębokość jamy wynosi $2mgq$. Przy nachylaniu równi, czyli zwiększaniu α, jama staje się coraz to płytsza i zanika, gdy punkty B_1 i B_2 pokrywają się.

Wartościom kąta β, przy których energia potencjalna przybiera lokalne maksimum, odpowiada stan równowagi chwiejnej (trójkącik na rys. 6): walec wytrącony z tego stanu podąża ku innemu stanowi równowagi. W stanie równowagi chwiejnej środek ciężkości walca znajduje się w punkcie B_2. Podczas doświadczeń wykonywano próby utrzymania walców i kul w stanie równowagi chwiejnej, zadanie to okazywało się jednak równie trudne, jak utrzymanie na palcu ołówka postawionego na ostrzu grafitowego pręcika.

Stabilność i równowaga

W rozwiązaniach architektonicznych i technicznych niemal nie stosuje się stanów równowagi chwiejnej. Zwykle wymagana jest wysoka stabilność – osiąga się ją, projektując budowle i urządzenia w taki sposób, by przyjmowały stany równowagi trwałej z możliwie głębokimi jamami energii potencjalnej. Jednakże istnieją inne niekonwencjonalne sposoby zapewnienia stabilności. Zanim przedstawimy jeden z nich, przypomnijmy, że stan równowagi to pojęcie ogólniejsze niż stan spoczynku. Ciało jest w równowadze nie tylko, gdy spoczywa, lecz także wtedy, gdy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Rozpatrzmy lot samolotu wyposażonego w stateczniki, wychylaniem których steruje pilot za pomocą drążka sterowego. Układ sterowania jest tak zaprojektowany, by samolot był samostateczny, tj. by utrzymywał swój prostoliniowy lot także wtedy, gdy pilot puści drążek. Oznacza to, że podczas lotu wykorzystywany jest stan równowagi trwałej.

Okazuje się jednak, że obniżając samosterowność samolotu, lub nawet zupełnie z niej rezygnując, można uczynić go bardziej zwrotnym i zmniejszyć opory jego ruchu, a więc także zużycie paliwa. Możliwe jest to jednak jedynie wówczas, gdy bardzo niewielkie odchylenia samolotu od stanu równowagi są dostatecznie szybko korygowane ruchem stateczników i lotek. Szybkość i precyzja reakcji, jakie zapewnić może pilot, okazują się jednak niewystarczające, więc do przeprowadzania (nieustannych) korekcji lotu stosuje się komputer. Umieszczone w samolocie czujniki, m.in. przyspieszeniomierze i żyroskopy, dostarczają komputerowi danych o odchyleniach od stanu równowagi, a program komputerowy zmienia położenie sterów tak, by lot był stabilny. Tak właśnie działa system „fly-by-wire”, dzięki któremu wojskowe samoloty (np. F22) są zdolne do niesamowitych manewrów, a takie jak F117 w ogóle mogą latać. Istotę tego systemu można porównać do czułego układu, który wykrywając odchylenie ołówka od pionu, analizowałby kierunek i kąt wychylenia i sterowałby ruchem ręki tak, by utrzymywać ołówek w stanie bardzo bliskim stanowi równowagi.

Inną skomplikowaną konstrukcją jest Segway, rodzaj elektrycznej hulajnogi na dwóch kołach osadzonych na wspólnej osi. Również i to urządzenie zachowuje równowagę dzięki czujnikom wyznaczającym zmiany położenia środka ciężkości, żyroskopom i komputerowemu sterowaniu.

Przykłady te pokazują, jak ciekawe może być pozornie proste zagadnienie stabilności i jak można niekonwencjonalnie je rozwiązywać. A zadanie określenia położeń równowagi niejednorodnej bryły okazuje się nietrywialnym problemem, choć do jego rozwiązania wystarczają klasyczne prawa statyki.