

# Geofizyka, przetwarzanie sygnałów, FBI i MPEG-4, czyli o tym, co mogą falki

Piotr WOJDYŁŁO \*

Układy falkowe powstają z jednej funkcji pod wpływem dwóch działań: rozciągnięcia i przesunięcia. Zdefiniujmy te dwie operacje. Rozpatrzmy funkcję  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dzieliąc jej argument przez 2, a wartość przez  $\sqrt{2}$ , otrzymamy kolejną funkcję, którą oznaczymy przez

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

– taką operację będziemy nazywać *rozciągnięciem*. Ten proces możemy kontynuować, tworząc następne funkcje  $f_2(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{4}\right)$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{8}\right)$  itd. wg wzoru

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Możemy również zamiast rozciągać funkcję  $f$  rozciągnąć jej przesunięcie. Takie rozciągnięte przesunięcie będzie wyrażało się wzorem

$$f_n^m(x) = \frac{1}{\sqrt{2}^n} f\left(\frac{x}{2^n} - m\right).$$

Oczywiście, możemy przesuwać nie tylko w prawo, ale i w lewo, oraz zamiast rozciągać możemy też *ścięśniać*. Od tej pory przez przesunięcia będziemy rozumieć przesunięcia i w prawo, i w lewo, a przez rozciągnięcia zarówno rozciągnięcia jak i ścięśnienia. Zauważmy, że przesunięcie zachowuje normę funkcji, a także kąt między funkcjami.

Dla funkcji  $f$  i  $g$  z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}$ , takich, że  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty$  oraz  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2 dx < +\infty$ , definiujemy iloczyn skalarny wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx.$$

Mówimy, że funkcje  $f$  i  $g$  są prostopadłe, gdy  $\langle f, g \rangle = 0$ . Normą funkcji  $f$  nazywamy wartość

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Podobnie rozciągnięcie – można to sprawdzić całkując przez podstawienie. Przez przesunięcia i rozciągnięcia z jednej funkcji otrzymujemy nieskończony układ funkcji. Okazuje się, że możemy tak dobrać funkcję startową, że wszystkie funkcje układu będą wzajemnie prostopadłe, a norma każdej z nich będzie równa 1. Funkcję o tej własności nazywamy właśnie *falką*, a układ przez nią generowany *układem falkowym*. Znanym od 1910 roku przykładem jest układ Haara. Otrzymujemy go, wychodząc od funkcji  $f$  równej 1 dla  $x \in [0, 1/2)$  i  $-1$  dla  $x \in [1/2, 1]$ , która poza tym jest równa 0. Niestety, nieciągłość tej falki uniemożliwia jego praktyczne wykorzystanie.

Jak znaleźć inne falki? W tym celu poszukujemy funkcji  $\phi$ , która spełniałaby poniższe równanie dla odpowiednio dobranych współczynników  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(x) = a_0 \phi(2x) + a_1 \phi(2x - 1) + a_2 \phi(2x - 2) + a_3 \phi(2x - 3) + a_4 \phi(2x - 4) + a_5 \phi(2x - 5).$$

Niezbędna (choć niewystarczająca) własność współczynników  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  jest taka, że iloczyn skalarny każdego dwóch spośród wektorów

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

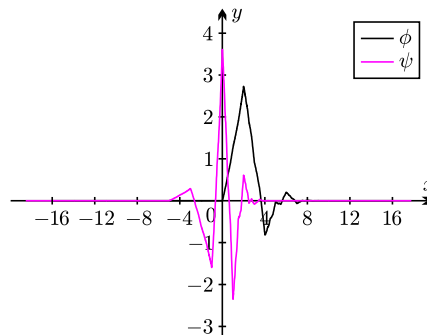
$$(0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0, 0, 0, 0),$$

$$(0, 0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0, 0),$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

jest równy 0.

Współczynniki  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  można też wykorzystać do zbudowania filtra cyfrowego tzw. kwadraturowo lustrzanego (ang. *quadrature mirror filters*), ale o tym innym razem.



Przykładowy zestaw przybliżonych wartości mający tę własność to  $a_0 \approx 0,3327$ ,  $a_1 \approx 0,8069$ ,  $a_2 \approx 0,4599$ ,  $a_3 \approx -0,1350$ ,  $a_4 \approx -0,0854$ ,  $a_5 \approx 0,0352$ . Przesunięcia  $\phi$  są do siebie prostopadłe, ale przy rozciąganiu tak być nie musi. Jednak gdy znajdziemy już takie  $\phi$ , to jesteśmy w stanie otrzymać falkę  $\psi$  za pomocą wzoru:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x) = a_0 \phi(2x - 1) - a_1 \phi(2x) + a_2 \phi(2x + 1) - a_3 \phi(2x + 2) + a_4 \phi(2x + 3) - a_5 \phi(2x + 4).$$

Funkcja  $\psi$  spełnia wszystko, czego oczekujemy od funkcji startowej – jej przesunięcia i rozciągnięcia są do siebie prostopadłe. Na rysunku powyżej przedstawiamy wykres funkcji  $\phi$  i  $\psi$  dla podanych wyżej współczynników. Otrzymana falka jest funkcją ciągłą. Postępując podobnie, ale z większą liczbą współczynników  $a_i$ , można otrzymać falki mające też ciągłe pochodne wyższych rzędów.

Jak wiadomo przedstawienie punktu w prostokątnym układzie współrzędnych wyznaczone jest przez jego rzuty na poszczególne osie układu. Układ falkowy pełni podobną rolę jak prostokątny układ współrzędnych. W celu przedstawienia funkcji  $g$  w takim układzie, znajdujemy rzuty tej funkcji na kolejne elementy układu i one stanowią jej współczynniki. Współczynnik względem elementu  $\psi_n^m$  wyraża się przez  $\langle g, \psi_n^m \rangle$ . Układ przesunąć i rozciągnąć falki ma także tę własność (o ile tylko falka jest dostatecznie porządną), że przedstawiona w takim układzie funkcja nie zmienia się istotnie, gdy odrzucimy współczynniki o wartości bezwzględnej

\*Instytut Matematyczny PAN

mniejszej od, powiedzmy, 0,01. Jeżeli współczynników o wartościach powyżej 0,01 jest stosunkowo niewiele, uzyskaliśmy efekt bardzo istotny dla efektywnej kompresji sygnału lub obrazu: przedstawienie funkcji przez wiele współczynników zastąpiłoby przedstawieniem funkcji o stosunkowo niewielkiej liczbie współczynników, jedynie nieznacznie zmieniając sygnał początkowy (funkcję).

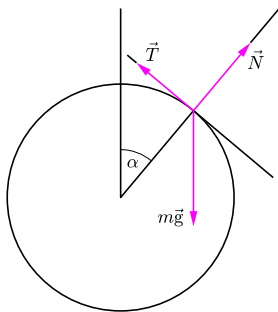
W 1984 Jean Morlet, geofizyk francuski i autor prototypu współczesnych falek, używał układów powstających przez rozciągnięcia i przesunięcia pewnej funkcji, gęściejszych niż we współczesnych falekach. Dzięki temu, choć funkcja startowa nie była faleką, rozwinięcie sygnału w związanym z nią układzie rozciągnięć i przesunięć wciąż dobrze aproksymowało sygnał wyjściowy. Jego metoda wykrywania warstw tektonicznych przez przetwarzanie sygnału sejsmicznego polegała na przyporządkowaniu w konkretny sposób ciągłej funkcji interpolującej ten sygnał, a następnie detekcji nieciągłości jej pochodnych. W miejscach nieciągłości pochodnych niektóre współczynniki rozwinięcia, szczególnie dla wysokich „ściągnięć”, były spore. Odpowiadające im punkty stanowiły lokalizatory przejścia z warstwy do warstwy. Pomimo, że taka metoda detekcji jest odporna na zakłócenia, Morlet nie potrafił przekonać swoich kolegów, że może ona mieć szerokie zastosowania. Na szczęście, jego współpraca

z A. Grossmannem, I. Daubechies i Y. Meyerem nadała tej historii inny bieg. Y. Meyer skonstruował pierwszą falekę, która jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, choć początkowo sądzono, że jest to niemożliwe. Następnie I. Daubechies skonstruowała klasę przykładów falek o dowolnie wielu pochodnych ciągłych, ale różnych od zera jedynie na pewnym skończonym odcinku.

Wspomniane zastosowania legły u podstaw zainteresowania falekami. W 1992 algorytm oparty na falekach został wybrany i wdrożony przez FBI do efektywnej i zachowującej istotne szczegóły kompresji bazy danych z odciskami palców (2000 terabajtów danych). Metody oparte na falekach znalazły się również jako jeden z wariantów kodowania w standardzie transmisji sygnału audiowizualnego o wysokim stopniu kompresji MPEG-4 i stały się podstawą kompresji zdjęć w formacie JPEG2000. Współcześnie wykorzystuje się faleki w analizie szeregów czasowych, iteracyjnym rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych opisujących np. rozchodzenie się ciepła lub naprężeń czy badaniu fal mózgowych. W MATLABIE funkcja `dwt` oferuje obliczenie współczynników sygnału w układzie falekowym, a wiele ze współczesnych procesorów do przetwarzania dźwięku (DSP) zawiera transformatę falekową jako niemal standardową komendę.



**Rozwiązanie zadania F 675.**  
Siły działające na akrobatę: ciężkości  $m\vec{g}$ , tarcia  $\vec{T}$  oraz reakcji podłoża  $\vec{N}$ , przedstawione są na rysunku:



Zgodnie z warunkiem zadania akrobata porusza się ze stałą prędkością, zatem suma sił na niego działających jest równa zeru, co rozpisane na kierunki: styczny do powierzchni oraz prostopadły daje:

$$mg \sin \alpha - T = 0,$$

$$N - mg \cos \alpha = 0.$$

Ponieważ siła tarcia  $T$  nie przekracza  $\mu N$ , więc równania te dają

$$\alpha_0 = \arctg \mu.$$

## Wiedzieć, nie znając

Wiktor BARTOL\*

Zbiór liczb rzeczywistych jest na tyle bogaty i różnorodny, że można go rozkładać na różne sposoby wedle gustu. W szczególności można liczby rzeczywiste dzielić na algebraiczne i przestępne. Liczba algebraiczna to taka, która jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych (lub, równoważnie, całkowitych), przestępna to taka, która nie jest. Łatwo zauważyć, że liczba algebraiczna może być niewymierna, jak np.  $\sqrt{2}$ , spełniająca równanie  $x^2 - 2 = 0$ , natomiast liczba przestępna nie może nie być niewymierna, ponieważ każda liczba wymierna  $a$  spełnia równanie  $x - a = 0$ . Tak więc zbiór liczb algebraicznych zawiera zbiór wszystkich liczb wymiernych i jeszcze coś więcej. Jak bardzo więcej?

Znalezienie liczby przestępnej okazało się zadaniem wcale niełatwym. W 1844 roku Joseph Liouville podał pierwsze przykłady, a nawet nieskończenie wiele, korzystając przy tym z ułamków łańcuchowych. Nieco później wskazał pierwszą liczbę przestępną o znanym rozwinięciu dziesiętnym: to liczba  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,11000100000000000000000100\dots$ , która ma 1 na miejscu o numerze postaci  $n!$  i 0 na pozostałych. W 1873 r. Charles Hermite udowodnił przestępność podstawy logarytmu naturalnego, czyli liczby  $e$ . Korzystając z tego wyniku, Carl L. F. von Lindemann wykazał w 1882 roku, że przestępna jest także liczba  $\pi$ . Wynik sam w sobie ciekawy i pożyteczny, bo wynika z niego nierozwiązalność problemu kwadratury koła – lecz już nieistotny z punktu widzenia pytania o wielkość zbioru liczb algebraicznych czy zbioru liczb przestępnych. Powodem było jedno z piękniejszych twierdzeń współczesnej matematyki, opublikowane w 1874 roku przez Georga Cantora.

Cantor wprowadził do matematyki aparaturę, która pozwala mierzyć i porównywać wielkości zbiorów nieskończonych. Zbiór jest przeliczalny, jeśli

\*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego