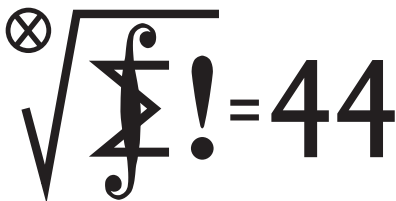


Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2008

Czołówka ligi zadaniowej

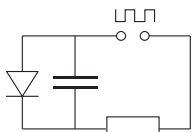
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
537 ($WT = 2,42$) i 538 ($WT = 1,50$)
z numeru 3/2007

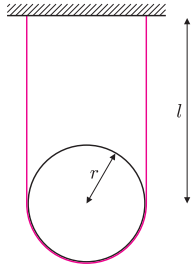
Tomasz Wietecha	– Tarnów	47,09
Andrzej Daniluk	– Warszawa	42,70
Dariusz Kurpiel	– Posada	
	Zarszyn	42,51
Witold Bednarek	– Łódź	38,60
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	38,05
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	37,78

I znów moment godny odnotowania:

Tomasz Wietecha zgromadził 44 punkty już po raz siódmy!



Rys. 1



Rys. 2



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 549, 550

Redaguje Marcin E. KUCZMA

549. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| > |BC| > |CA|$. Odcinek CK jest jego wysokością; punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i AC . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN leży na prostej PQ .

550. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć kres dolny zbioru tych liczb rzeczywistych x , które spełniają nierówność $[x] \cdot \{x\} \geq a$. (Symbol $\{x\}$ oznacza tu liczbę $x - [x]$).

Zadanie 550 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Zadania z fizyki nr 446, 447

Redaguje Jerzy B. BROJAN

446. Do źródła napięcia o przebiegu prostokątnym (tzn. $U = +U_0$ w ciągu czasu T , następnie $U = -U_0$ w takim samym przedziale czasu) przyłączono obwód składający się z opornika o oporze R , kondensatora o pojemności C oraz diody doskonale przewodzącej w kierunku przewodzenia i całkowicie nieprzewodzącej w kierunku zaporowym (schemat obwodu – rys. 1). Jak długo płynie prąd przez diodę w ciągu jednego okresu zmian napięcia?

447. Jednorodny walec o promieniu r wisi na dwóch pętlach lekkiej i nierozciągliwej nitki (zob. rys. 2), a odległość osi walca od poziomiu zawieszenia jest równa l . Odległość końców każdej z nitek jest równa $2r$. Obliczyć częstotliwość małych drgań takiego wahadła – oś walca pozostaje równoległa do jej kierunku w położeniu równowagi.

Można też inaczej

W artykule *Równanie Pitagorasa w kongruencjach* w poprzednim numerze *Delty* autorzy dowodzą, że równanie Pitagorasa

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ma dokładnie p^2 rozwiązań w ciele \mathbb{Z}_p . Oto elementarny dowód: najpierw zauważmy, że równanie Pitagorasa, które można równoważnie zapisać w postaci:

$$(1) \quad x^2 = (z - y)(z + y)$$

ma nad ciałem charakterystyki różnej od 2 tyle samo rozwiązań, co równanie:

$$(2) \quad a^2 = bc.$$

Istotnie, jeśli (x, y, z) jest rozwiązaniem równania (1), to $(a, b, c) := (x, z - y, z + y)$ jest rozwiązaniem równania (2) i odwrotnie: rozwiązanie (a, b, c)

równania (2) daje rozwiązanie $(x, y, z) := (a, \frac{c-b}{2}, \frac{c+b}{2})$ równania (1). Te przekształcenia pomiędzy trójkami (x, y, z) rozwiązań pierwszego równania i trójkami (a, b, c) rozwiązań drugiego równania są wzajemnie odwrotne i zadają bijekcję zbiorów rozwiązań.

Rozwiązania równania (2) w \mathbb{Z}_p łatwo zliczyć. Każda para (a, b) , gdzie $b \neq 0$ wyznacza jedyną wartość $c = a^2 b^{-1}$, przy której równanie jest spełnione. Takich par (a, b) jest $p(p-1)$. Ponadto mamy rozwiązania postaci $(0, 0, c)$ dla dowolnego c . Łącznie rozwiązań jest więc $p(p-1) + p = p^2$. To samo rozumowanie pokazuje, że w ciele \mathbb{F}_p^m (dla $p \neq 2$) rozwiązań równania Pitagorasa jest $p^m(p^m - 1) + p^m = p^{2m}$.

Michał ADAMASZEK