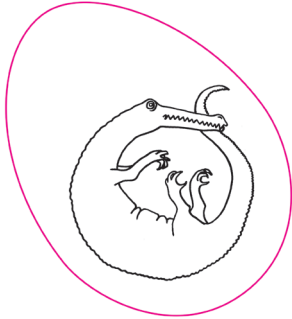


# Matematyka a krokodyle, proporcja płci i przetrwanie gatunku

Marek BODNAR\*

Krokodyle (*Crocodylia*) są jedynym żyjącym przedstawicielem grupy gadów naczelných. Innymi znanymi przedstawicielami tej grupy były dinozaury, które wymarły około 65 mln lat temu, w kredzie. Natomiast krokodyle przetrwały w prawie niezmienionej formie od tamtych czasów. Występowały one wtedy na znacznie większym obszarze niż teraz – ich szczątki znaleziono daleko na północy w Kanadzie i w Szwecji. Pojawia się zatem pytanie: dlaczego krokodyle przetrwały?

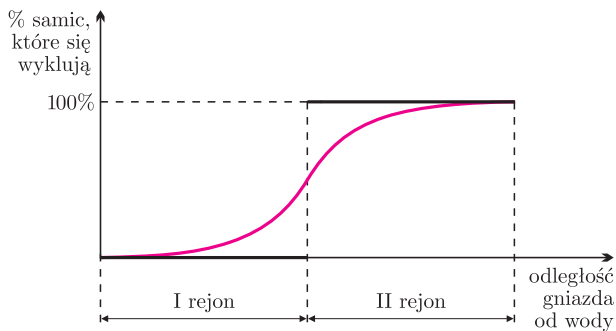


W odróżnieniu od większości gatunków kręgowców, których płeć jest wyznaczona genetycznie, płeć młodego krokodyla zależy od temperatury, w jakiej było „wysiadywane” jajo. Zjawisko to, zwane termiczną determinacją płci, spotykamy często wśród gadów. Nasze rozważanie przeprowadzimy na przykładzie aligatora amerykańskiego (*Alligator mississippiensis*). Jeśli jego jaja są inkubowane w temperaturze 30°C lub niższej, to wylęgają się z nich same samice. Gdy jaja są inkubowane w temperaturze 33°C, to wylęgają się same samce. Natomiast gdy jaja przebywają w temperaturze powyżej 35°C, to wykluwa się 90% osobników żeńskich, lecz zwykle nie są one zdolne do życia.

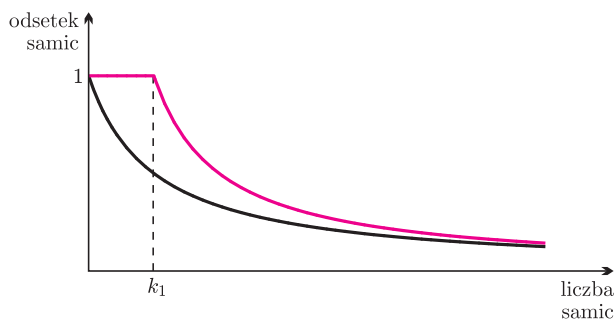
Możesz zadać, Czytelniku, pytanie: „Co do tego wszystkiego ma matematyka?” Otóż, skonstruujemy bardzo prosty matematyczny opis rozwoju populacji krokodyli, który wskaże, że opisany powyżej sposób determinacji płci osobników może w znaczący sposób zwiększyć zdolność przetrwania gatunku.

W celu opisanego rozwoju populacji krokodyli za pomocą aparatu matematycznego potrzebujemy pewnej dodatkowej wiedzy biologicznej o zachowaniu się tych gadów. Gniazda krokodyli założone bliżej wody, w bardziej mokrym gruncie, mają niższą temperaturę i wykluwa się w nich większy odsetek samic niż w gniazdach położonych dalej od wody (gdzie grunt jest bardziej suchy), które są „cieplejsze”. Dla uproszczenia rozważymy jedynie

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Realistyczna (kolor) i przybliżona (czarna) funkcja obrazująca odsetek samic, które wylęgają się w gnieździe krokodyli, w zależności od odległości tego gniazda od wody.



Rys. 2. Odsetek samic, które mogą założyć gniazda w rejonie I. Linia czarną zaznaczyliśmy przybliżoną funkcję, kolorową – funkcję rzeczywistą.

dwa rejonu lęgowe: rejon I, w którym wylęgają się wyłącznie samice i rejon II, w którym wylęgają się tylko samce. Rysunek 1 ilustruje to przybliżenie rzeczywistej sytuacji (którą odzwierciedla wykres funkcji zaznaczony linią kolorową). Choć w rzeczywistości nie ma takiego skoku, jak zakładamy, to przybliżenie ułatwi nam analizę, a otrzymany wynik okazuje się w obu przypadkach podobny.

Niech  $f(t)$  oznacza liczebność populacji samic, natomiast  $m(t)$  – liczebność populacji samców. Ponieważ samice zwykle szukają na gniazdo miejsca najbardziej zbliżonego do tego, w którym same się wyklują, to preferują zakładanie gniazd w rejonie I. Jednakże ograniczona liczba miejsc na gniazda w tym rejonie powoduje, że część samic musi szukać miejsca lęgowego w rejonie II. Przyjmijmy, że w rejonie I zakłada gniazda

$$\frac{k_1}{k_1 + f}$$

spośród wszystkich samic. Ułamek ten znów jedynie przybliży rzeczywisty odsetek samic, które zakładają gniazda w rejonie I (gdyż jeśli liczba samic  $f$  jest mniejsza od liczby miejsc lęgowych w rejonie I równej  $k_1$ , to wszystkie samice powinny w rejonie I pozostać). Jak poprzednio, to przybliżenie ułatwi analizę, ale nie zmieni końcowego wyniku. Na rysunku 2 widzimy wykres funkcji obrazującej odsetek samic, które mogą założyć gniazda w rejonie I.

Wobec tego, z rejonu I do II w poszukiwaniu miejsca na gniazda udaje się

$$\left(1 - \frac{k_1}{k_1 + f}\right) f = \frac{f^2}{k_1 + f} \text{ samic.}$$

W rejonie II także istnieje ograniczona liczba  $k_2$  miejsc lęgowych. Zatem tylko

$$\frac{k_2}{k_2 + \frac{f^2}{k_1 + f}}$$

samic będzie mogło założyć gniazda w tym rejonie.

Powyższy ułamek przybliżymy za pomocą prostszego:

$$\frac{k_2}{k_2 + f}.$$

Podsumowując, otrzymujemy, że liczba samic, które złożyły gniazda, wynosi

$$\text{w rejonie I: } \frac{k_1}{k_1 + f} \cdot f,$$

$$\text{i w rejonie II: } \frac{k_2}{k_2 + f} \cdot \frac{f^2}{k_1 + f}.$$

Szybkość wzrostu populacji samic jest proporcjonalna do liczby samic, które złożyły jaja w rejonie I i maleje wraz ze wzrostem śmiertelności, która jest proporcjonalna do liczebności populacji. Podobnie, szybkość wzrostu populacji samców jest proporcjonalna do liczby samic, które złożyły jaja w rejonie II i maleje wraz ze wzrostem śmiertelności. Szybkość zmian dowolnej, gładkiej funkcji opisuje jej pochodna, a zatem powyższe zależności możemy zapisać za pomocą równań różniczkowych

$$(1a) \quad \frac{df}{dt} = r \frac{k_1}{k_1 + f} \cdot f - sf,$$

$$(1b) \quad \frac{dm}{dt} = r \frac{k_2}{k_2 + f} \cdot \frac{f^2}{k_1 + f} - sm.$$

W powyższym układzie  $r$  jest współczynnikiem rozrodczości, który uwzględni średnią liczbę jaj składanych przez samicę krokodyla oraz średni odsetek piskląt, które się wykluwają i przeżywają do momentu, gdy same są zdolne do rozmnażania się. Współczynnik  $s$  nazywamy współczynnikiem śmiertelności (typowo oznacza on odwrotność średniego czasu życia) – tutaj – krokodyli. Dla uproszczenia przyjmujemy, że powyższe współczynniki są takie same dla samców i samic (co nie odbiega zbyt od rzeczywistości).

Zauważmy teraz, że jeśli populacje są bardzo liczne (czyli  $f$  i  $m$  bardzo duże), to prawe strony równań (1) są ujemne. Ujemna szybkość wzrostu oznacza, że liczebność populacji się zmniejsza. Aby gatunek przetrwał, musi istnieć punkt, w którym spadek liczebności obu populacji ulegnie zahamowaniu, czyli szybkość zmian wynosi 0. Poszukamy takiego punktu dla populacji samic. W tym celu przyrównamy

prawą stronę równania (1a) do zera i otrzymujemy:

$$r \frac{k_1}{k_1 + f} \cdot f - sf = 0 \Rightarrow r \frac{k_1}{k_1 + f} = s \Rightarrow f = k_1 \left(\frac{r}{s} - 1\right).$$

Łatwo zauważyć, że wymieranie populacji samic ulegnie zahamowaniu tylko wtedy, gdy  $r > s$ . Wtedy też ulegnie zahamowaniu wymieranie populacji samców: gdy  $f > 0$ , a  $m$  bliskie zeru, to prawa strona równania (1b) jest dodatnia.

Popatrzmy teraz, co działoby się, gdyby płeć krokodyli była determinowana genetycznie. Rozróżnienie na rejon I i II nie miałyby już sensu. Liczba miejsc lęgowych wyniosłaby wtedy  $k_1 + k_2$ , a liczba samic, które złożyły jaja, równałaby się

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + f} \cdot f.$$

Połowa nowonarodzonych byłaby samicami, a połowa – samcami. Zatem równania (1) uległyby minimalnym zmianom i otrzymalibyśmy układ równań:

$$(2a) \quad \frac{df}{dt} = \frac{r}{2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + f} \cdot f - sf,$$

$$(2b) \quad \frac{dm}{dt} = \frac{r}{2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + f} \cdot f - sm.$$

Tak, jak poprzednio, sprawdzimy, w którym momencie zatrzymane zostałyby wymieranie populacji samic. Przyrównując prawą stronę równania (2a) do zera, otrzymujemy

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + f} \cdot f = sf \Rightarrow f = (k_1 + k_2) \left(\frac{r}{2s} - 1\right).$$

A zatem, by populacja samic (a co za tym idzie – samców) nie wymarła, konieczne jest, by było  $r > 2s$ , czyli współczynnik rozrodczości musi być dwa razy większy niż w przypadku płci wyznaczonej przez temperaturę inkubacji jaj. To pokazuje zalety metody determinacji płci, którą stosują krokodyle.

Na koniec słowo na temat proporcji płci. Gdy płeć jest wyznaczana genetycznie, stosunek liczby osobników męskich do żeńskich jest bliski 1:1. Wtedy do przetrwania gatunku potrzeba, by średnio jedna samica w ciągu życia miała ponad 2 potomków, które z sukcesem się rozmnożą (liczba ta faktycznie jest bliska 2,1 potomka). W przypadku gdy osobników żeńskich jest więcej (jak u krokodyli), to średnia liczba potomków potrzebnych do przetrwania gatunku zmniejsza się i wynosi około 1,1, gdy jeden samiec przypada na 10 samic.

Bardziej szczegółowe omówienie zagadnień poruszonych w tym artykule może Czytelnik znaleźć w rozdziale 4 książki J.D. Murray „Wprowadzenie do biomatematyki”, PWN, Warszawa 2006.



#### Rozwiązanie zadania M 1190.

Podamy przykład 12 takich kół. Niech  $\mathcal{D}$  będzie dwunastościanem foremnym, natomiast  $s$  sferą o środku  $O$  styczną do wszystkich jego krawędzi. Część wspólna sfery  $s$  oraz powierzchni dwunastościanu  $\mathcal{D}$

składa się z 12 okręgów, z których każdy jest styczny zewnętrznie do pięciu innych okręgów. Niech  $P$  będzie dowolnym punktem leżącym na sferze  $s$  i wewnątrz dwunastościanu  $\mathcal{D}$ . Rzut stereograficzny o środku  $P$  przeprowadza sferę  $s$  na płaszczyznę, a każdy z rozpatrywanych 12 okręgów przechodzi na okrąg styczny zewnętrznie do pięciu innych okręgów.