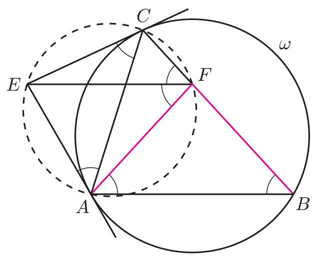
Rozwiązanie zadania M 1200.
Zauważmy, że

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle EFC,$$

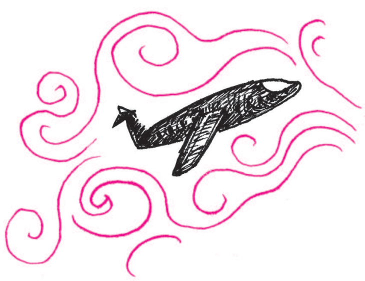
skąd wynika, że punkty E, A, F, C leżą na jednym okręgu.



Wobec tego otrzymujemy

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle ECA = \sphericalangle EFA = \sphericalangle FAB,$$

skąd bezpośrednio uzyskujemy tezę.



Domniemania i hipotezy o turbulencji

Grzegorz ŁUKASZEWICZ[*]

Pełne zrozumienie, a następnie opisanie zjawiska turbulencji w ramach spójnej teorii matematycznej stanowi wciąż duże wyzwanie dla fizyków i matematyków.

Turbulencja jest wszechobecna w przyrodzie, występuje w ogromnym zakresie skal wielkości, dotyczy zarówno ruchu płynów wewnętrznych w organizmach żywych, jak i ruchu gazu międzygwiezdnego. Hipotez i domniemań związanych z turbulencją jest mnóstwo, poczynając od problemu właściwego zdefiniowania zjawiska, doboru właściwego języka opisu, pytań o zakres zastosowań równań hydromechaniki klasycznej i dalszych pytań dotyczących interpretacji ich rozwiązań. Zanim przejdziemy do krótkiego przedstawienia kilku hipotez i domniemań, parę słów o samym zjawisku.

1. Co to jest turbulencja? Przykłady przepływów turbulentnych.
Będziemy mówić o przepływach cieczy i gazów (np. wody czy powietrza). Rozróżniamy przepływy laminarne (spokojne i uporządkowane) i przepływy turbulentne, o złożonej strukturze, charakteryzujące się dużymi i nieregularnymi wahaniami (zarówno w przestrzeni, jak i w czasie) prędkości, ciśnienia i innych zmiennych hydrodynamicznych. Do tych drugich należy większość przepływów spotykanych w przyrodzie czy generowanych przez człowieka. Przykłady zjawiska turbulencji to np. ruch powietrza w atmosferze ziemskiej, magmy we wnętrzu Ziemi, wody w rzekach i oceanach, gazu międzygwiezdnego, czy w mniejszej skali: ruch powietrza w pokoju, powietrza wydychanego z płuc, dymu w kominie czy spalin samochodowych.

Przepływy turbulentne dzięki swej złożonej strukturze mają inne własności niż „porządne” przepływy laminarne, np. wywierają większe siły na napotkane ciała stałe (zapinamy pasy bezpieczeństwa, wlatując w obszar turbulentny podczas lotu samolotem), mają większą zdolność przenoszenia ciepła, propagowania reakcji chemicznych, jak również mogą rozpraszać fale dźwiękowe czy elektromagnetyczne.

Hydrodynamika jako nauka o ruchu płynów zajmowała się przez długi czas głównie przepływami laminarnymi, jako że przepływy turbulentne wymykały się zarówno zrozumieniu, jak i obliczeniom. Dopiero zastosowanie metod probabilistycznych, nowoczesnego aparatu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych i nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych pozwoliło zauważyć, że „w tym chaosie jest metoda”. Mechanika turbulencji to statystyczna mechanika płynów. Jej prawa dotyczą uśrednionych wielkości hydrodynamicznych, a nie indywidualnych pól wektorowych, których zachowanie jest chaotyczne.

2. Domniemania i hipotezy.
Poniżej przedstawione są wybrane problemy dotyczące nauki o turbulencji, skupiające się wokół kilku podstawowych i kilku matematycznych pytań.

(H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji.
Poszukiwanie praw ogólnych ma podstawowe znaczenie dla zrozumienia rzeczywistości. Najważniejsze teorie mają charakter unifikujący, to znaczy łączący zjawiska rozważane wcześniej oddzielnie. Przykłady takich teorii to teoria grawitacji Newtona unifikująca świat podksiężycowy i świat nadksiężycowy, teoria ewolucji Darwina unifikująca cały świat organizmów żywych, teoria elektromagnetyzmu Maxwella unifikująca elektryczność i magnetyzm, czy teoria względności Einsteina unifikująca przestrzeń i czas.

W teorii turbulencji brak dotychczas jednolitego opisu matematycznego. Mamy różne opisy dla różnych zakresów wielkości, różnych typów przepływu, opierające się na różnych założeniach fenomenologicznych dobieranych czasami ad hoc. Analogią z zakresu mechaniki klasycznej może być np. opis ruchu pocisku armatniego i ruchu Księżyca wokół Ziemi w czasach sprzed pojawienia się teorii grawitacji. Domniemanie dotyczy istnienia pojęć i praw ogólnych. Jedną

[*]Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

z wielkości uniwersalnych w teorii turbulencji jest liczba Reynoldsa charakteryzująca stosunek typowych sił inercjalnych do sił lepkościowych w danym przepływie. Za jej pomocą można określić np. natężenie nieuporządkowania w przepływie (liczbę stopni swobody przepływu).

(H2) Równania Naviera–Stokesa opisują przepływy turbulentne.
Jest to bardzo istotne domniemanie, wyrażające przekonanie, że całość zjawisk dotyczących przepływów turbulentnych mieści się w teorii hydrodynamiki klasycznej opartej na równaniach Naviera–Stokesa,

$$\partial_t u \ + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u \ + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Jest to hipoteza o uniwersalności równań Naviera–Stokesa. W fizyce mamy do czynienia z równaniami o zakresie lokalnym i z takimi, którym przysługuje zakres globalny. Do tych ostatnich należą np. równania Maxwella. A jaki jest status równań Naviera–Stokesa? Jest zadziwiające, jak wiele cech charakterystycznych przepływów turbulentnych można z nich wydedukować. Podobnie jak to ma miejsce z najważniejszymi równaniami w fizyce, wydaje się, że są one mądrzejsze od nas, że można z nich wydobyć dużo więcej niż się ktokolwiek spodziewał. W przypadku równań Naviera–Stokesa jest to szczególnie zastanawiające, gdy weźmiemy pod uwagę fakt, że wyrażają one podstawowe prawa zachowania i są oparte na kilku zaledwie naturalnych założeniach fenomenologicznych.

(H3) Turbulencję można opisać w ramach teorii chaosu deterministycznego.
Mamy tu dwie hipotezy. Pierwsza stanowi tzw. problem milenijny, postawiony pod koniec ubiegłego wieku jako jedno z najważniejszych zagadnień w matematyce stanowiące wyzwanie dla nowego stulecia, a dotyczące pytania, czy globalne względem czasu, tzn. określone na całej półprostej $(0, +\infty)$, rozwiązania równań Naviera–Stokesa, o których wiemy, że istnieją, są dostatecznie regularne. Jeśli takie są, to są także jednoznacznie określone przez dane zadania. Możemy je zatem badać w ramach dobrze już rozwiniętej teorii układów dynamicznych. Za silnie nieuporządkowane zachowanie się rozwiązań (ruch turbulentny) byłoby wtedy odpowiedzialne dobrze znane zjawisko chaosu deterministycznego. Jest to właśnie drugie domniemanie. Stosunkowo nowa teoria nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych, zainspirowana w dużej mierze potrzebami hydrodynamiki, zaczyna dawać bardzo obiecujące wyniki w zastosowaniu do teorii równań Naviera–Stokesa i do badania długookresowego zachowania się ich rozwiązań. Dotyczy to np. teorii atraktorów i rozwiązań statystycznych.

(H4) Osobliwości rozwiązań równań Naviera–Stokesa tłumaczą turbulencję.
Regularność rozwiązań równań Naviera–Stokesa, o której mowa w poprzednim punkcie, jest sprawą otwartą, zatem jest miejsce dla hipotezy konkurencyjnej, mówiącej o tym, że być może rozwiązania te nie są wcale regularne i jednoznacznie określone przez dane zadania (np. dane początkowe). Bardzo piękne twierdzenie J. Leraya dotyczące rozwiązań w całej przestrzeni, stanowiące pewien argument, że taka sytuacja może mieć miejsce, mówi, iż rozwiązania są bardzo regularne poza, *być może*, pewną liczbą chwil, zawartą w skończonym przedziale czasu. Zbiór takich potencjalnych osobliwości jest domknięty i nie zawiera odcinka, a jego wymiar Hausdorffa jest nie większy od $\frac{1}{2}$. Jeśli ten zbiór jest niepusty, to może być odpowiedzialny za fenomen turbulencji (w każdej takiej chwili pole wektorowe wirowości przepływu nie jest całkowalne z kwadratem).

(H5) Przepływy turbulentne można opisać za pomocą skończonej liczby parametrów.
Domniemanie to, wywodzące się z rozważań fenomenologicznych, ma mocne wsparcie w teorii matematycznej. Gdyby było prawdziwe, to być może przepływy turbulentne można by było np. opisać za pomocą skończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych, i dalej, stosując obliczenia numeryczne, obliczać rozmaite interesujące nas wielkości. Badania dotyczące tego domniemania są jeszcze dalekie do zakończenia, idą w różne strony i polegają na oszacowaniach wymiaru atraktora, liczby węzłów determinujących czy liczby harmonik determinujących danego przepływu, na razie dla przepływów dwuwymiarowych. Pytanie o harmoniki determinujące np. dotyczy problemu istnienia skończonej liczby harmonik pola wektorowego prędkości wyrażonego przez szereg Fouriera, takich, że ich ewolucja w czasie determinuje (w pewnym sensie) zachowanie się pozostałych harmonik. Wiąże się to z nierozwiązanym dotąd problemem zamknięcia w teorii turbulencji, wynikającym z podstawowego faktu, że operatory uśrednień nie komutują z operatorami nieliniowymi, np. $\langle u^2 \rangle \neq \langle u \rangle^2$.

Literatura.

1. P.A. Davidson, *Turbulence. An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2004.

2. C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press, 2003.

3. A.S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence*, Dover Publicatons, 2007.