O pewnej sztuczce

Michał SKRZYPCZAK[*]

Rozwiązanie zadania F 711.
Z treści zadania wynika, że moc P grzałki jest równa ilości ciepła wypromieniowanego przez wodę w garnku w jednostce czasu. Zatem

$$P\Delta t = cm\Delta T,$$

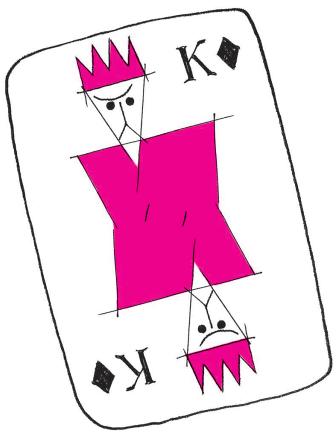
gdzie c jest ciepłem właściwym wody. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\Delta t \approx 42$ s.

Jakiś czas temu pokazano mi pewną sztuczkę karcianą. Pokazywały ją dwie osoby, Karol i Marcin. Najpierw Karol dostał pięć kart wylosowanych z talii. Nie pokazując ich nikomu, wybrał jedną z nich i ukrył przed wszystkimi. Pozostałe cztery ułożył w wybranej przez siebie kolejności i pokazał Marcinowi. Wtedy ten bezbłędnie odgadł, jaka jest piąta, ukryta karta.

Obliczmy. Marcinowi została zaprezentowana pewna permutacja czteroelementowego zbioru kart. Takich permutacji jest $4! = 24$. Następnie odgadł pozostałą, ukrytą kartę. W talii są 52 karty, on widzi 4 z nich, więc pozostaje 48 możliwości. Czyli Marcin dostał $\log_2 24$ bitów informacji, a do podjęcia decyzji potrzebuje $\log_2 48$ bitów. Proste odejmowanie, $\log_2 48 - \log_2 24 = \log_2 2 = 1$, dowodzi, że Marcin ma dokładnie o bit informacji za mało!

W czasie gdy liczyliśmy, oni pokazali sztuczkę następnych kilka razy i zawsze się udawała. W naszych obliczeniach pominęliśmy fakt, że Karol własnoręcznie wybierał tę jedną kartę spośród pięciu. Ale jak wybór Karola może przekazać bit informacji Marcinowi?

Poniżej zaprezentowane jest przykładowe rozwiązanie, jednak przed jego przeczytaniem polecam poszukać własnego.



Rozwiązanie okazuje się (jak zwykle) proste, chociaż (jak zwykle) trudno na nie wpaść. Najpierw opiszę działanie od strony Karola. Dostałem pięć kart. Wśród nich któryś kolor musi występować przynajmniej dwa razy. Powiedzmy, że ten kolor to pik i mamy do czynienia z dwiema kartami w tym kolorze (jeżeli jest ich więcej, to bierzemy pod uwagę tylko dwie). Mówiąc nieściśle, wybieram tę z nich, od której jest bliżej do drugiej, idąc cyklicznie w górę (2, 3, ... król, as, 2, 3, ...). Ściślej, kartom od dwójki do asa przypiszmy liczby od 0 do 12 i liczby odpowiadające naszym dwóm pikom oznaczmy a i b. Oznaczmy $(a-b) \bmod 13$ przez A i $(b-a) \bmod 13$ przez B. Oczywiście, $A+B=13$, obie są dodatnie, więc któraś z nich jest mniejsza niż 7. Z symetrii mogę założyć, że B. W takim przypadku wybieram kartę odpowiadającą liczbie a i mam gwarancję, że druga z nich nie jest dalej niż 6 kart „do przodu” (bo $B < 7$). Teraz pora na permutację, którą przekażę Marcinowi. Pozostały z dwóch pików kładę jako pierwszy, pozostałe trzy karty permutuję według ustalonego algorytmu, tak by zakodować liczbę B. To się uda, ponieważ permutacji jest $3! = 6$, a B jest jedną z liczb $1, \ldots, 6$.

Przykładowa metoda kodowania liczb za pomocą permutacji może wyglądać następująco. Mamy do użycia j kart i chcemy za ich pomocą zakodować jedną spośród liczb $\{1, 2, \ldots, j!\}$, oznaczmy ją h. Przyjmijmy, że karty te są posegregowane według ich rangi $K_0, K_1, \ldots, K_{(j-1)}$. Weźmy kartę $\lfloor \frac{h-1}{(j-1)!} \rfloor$ i połóżmy ją jako pierwszą w permutacji. Następnie za pomocą pozostałych kart zakodujmy indukcyjnie liczbę $((h-1) \mod ((j-1)!)) + 1$ jako permutację pozostałych $j-1$ kart. Oczywiście, indukcja ta się kończy, gdy mamy zakodować pojedynczą kartą liczbę 1, co wykonujemy, po prostu kładąc kartę na stole.

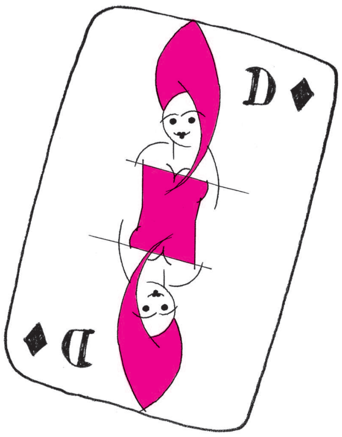
Zadanie Marcina, czyli odkrycie schowanej karty, jest prostsze. Wie, że piąta karta jest takiego koloru jak pierwsza w kolejności. Wystarczy więc, że odkoduje zakodowaną liczbę B na podstawie permutacji ostatnich trzech kart. Wtedy pójdzie o B kart „w górę”, począwszy od pierwszej w kolejności i już wie, jaka karta została ukryta.

Przedstawię teraz, jak działa opisana sztuczka w konkretnym przypadku. Załóżmy, że Karol dostał następujące karty: $3\diamondsuit, 5\heartsuit, 9\spadesuit, D\clubsuit, A\diamondsuit$. Jak widać, mamy dwie karty w kolorze karo ($\diamondsuit$), dlatego – zgodnie z przyjętym algorytmem – którąś z nich będziemy kodować. Pomiędzy trójką a asem jest 10 kart $(4, 5, \ldots, K)$, natomiast pomiędzy asem a trójką tylko jedna (2). Dlatego to $3\diamondsuit$ chowamy. Oczywiście, najpierw kładziemy na stole asa karo, jako pierwszą kartę, następnie pozostałe trzy sortujemy według rangi: $D\clubsuit, 5\heartsuit, 9\spadesuit$. Chcemy zakodować liczbę 2, ponieważ idąc od asa do trójki, trzeba zrobić dwa kroki

[*]student, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

($A \to 2 \to 3$). Dlatego najpierw kładziemy $\lfloor \frac{2-1}{(3-1)!} \rfloor = 0$ kartę, czyli $D\clubsuit$, następnie za pomocą kart $5\heartsuit, 9\spadesuit$, kodujemy liczbę $((2-1) \bmod ((3-1)!)) + 1 = 2$, czyli kładziemy następnie kartę $9\spadesuit$, no i na koniec pozostałą $5\heartsuit$. Ostateczna kolejność to $A\diamondsuit, D\clubsuit, 9\spadesuit, 5\heartsuit$.

Otrzymawszy takie informacje, Marcin przystępuje do dzieła. Od razu wie, że kolor poszukiwanej karty to $\diamondsuit$. Teraz pozostaje zdekodować liczbę B. Ponieważ jako pierwsza wśród kart kodujących permutację jest najmniejsza z nich, więc poszukiwana liczba to 1 lub 2. Następnie występuje starsza spośród pozostałych dwóch kart, więc szukana liczba to 2. Poczynając od pierwszej karty, czyli $A\diamondsuit$, odliczamy 2 w górę i uzyskujemy wynik: $3\diamondsuit$.



Znamy rozwiązanie, ale czy jest ono optymalne? Widzimy, że gdy więcej niż dwie karty będą tego samego koloru, to w sposób dowolny wybieramy, którymi dwiema z nich się zająć. Może dałoby się jeszcze więcej informacji przekazać tym wyborem? Karol najpierw wybiera jedną kartę z pięciu, potem wybiera jedną permutację z dwudziestu czterech, w sumie ma aż 120 różnych sposobów ułożenia kart. Gdyby udało się w pełni z tego bogactwa skorzystać, Marcin byłby w stanie odgadnąć jedną ze 120 kart, więc cała talia mogłaby się składać ze 124 kart!

Przejdźmy do przypadku ogólnego. Przez k oznaczmy liczbę kart losowanych z talii. Karol wybiera jedną z k kart, potem jedną z $(k-1)!$ permutacji, w sumie ma $k!$ różnych możliwości, więc niech nasza talia ma $k! + k - 1$ kart oznaczonych $0, 1, \ldots, k! + k - 2$. Oznaczmy wylosowane karty $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$, tak by $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1}$. Niech $L \equiv t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1} \pmod{k}$. Do odłożenia na bok wybieramy kartę t_L. Od teraz wszystkim kartom w talii, z pominięciem tych $k-1$ kart, jakie mamy na ręku, nadajemy w myślach nowe numery od 0 do $k! - 1$, tak by zachować kolejność. Nowy numer karty t_L oznaczamy przez X. Zauważmy, że dokładnie L kart w naszym ręku ma numery mniejsze od t_L, więc podczas przenumerowania karta t_L spadnie dokładnie o L pozycji, wobec czego $X = t_L - L$. Za pomocą ustalonego algorytmu permutowania tak ustawiamy pozostałe na ręku karty, by kodowały $\lfloor \frac{X}{k} \rfloor$ i pokazujemy je Marcinowi.

Marcin widzi wszystkie $k-1$ kart z naszej ręki, więc jest w stanie tak samo jak my przenumerować wszystkie karty, których nie widzi. Ponadto zna sumę $S \equiv t_0 + \ldots + t_{L-1} + t_{L+1} + \ldots + t_{k-1} \pmod{k}$. Zauważmy, że $X = t_L - L = t_L - (t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1}) \equiv -S \bmod k$. Odkodowując liczbę z permutacji, Marcin zna $\lfloor \frac{X}{k} \rfloor$. Skoro $X \equiv k - S \pmod{k}$, to $X = \lfloor \frac{X}{k} \rfloor \cdot k + k - S$. Teraz już prosto, znając X i karty na naszym ręku, Marcin odwraca proces przenumerowywania i poznaje t_L.

A dlaczego nie da się lepiej? Może ograniczenie $k! + k - 1$ na liczebność talii jest zbyt rygorystyczne? Postarajmy się to ściśle udowodnić. Ustalmy, że talia składa się z n kart. Wtedy Karol jest postawiony wobec jednej z $\binom{n}{k}$ sytuacji, podejmuje swoje decyzje i przekazuje dane Marcinowi. Ten może dostać od niego dokładnie $\binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$ różnych układów ($k-1$ elementowe, uporządkowane podzbiory zbioru n elementowego). Przypuśćmy, że $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$ Wtedy, z zasady szufladkowej Dirichleta, niezależnie od sposobu przyporządkowywania, będzie istniał jakiś układ czterech kart, jakie Karol pokazał Marcinowi, któremu to układowi odpowiada więcej niż jeden układ pięciu kart, jakie dostał na początku Karol. Czyli nie każdy układ, jaki dostał na początku Karol, Marcin będzie mógł jednoznacznie odtworzyć. Wobec czego, by sztuczka się udała, musi być $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k-1} \cdot (k-1)!$. Czyli $\frac{n!}{k!(n-k)!} \leqslant \frac{n!}{(n-k+1)!}$, zatem $k!(n-k)! \geqslant (n-k+1)!$, co daje $k! \geqslant n - k + 1$, więc $n \leqslant k! + k - 1$. Udowodniliśmy, że opisany powyżej schemat jest optymalny.

Sztuczkę tę wymyślił w latach dwudziestych XX wieku matematyk amerykański Wiliam Fitch Chaney, Jr. (ur. 1894, zm. 1974). Już w dzieciństwie interesował się sztuczkami magicznymi i ćwiczył swe zdolności manualne, by zabawiać znajomych i rodzinę różnymi trickami. Później, gdy został nauczycielem w Tufts College na początku lat dwudziestych, wykorzystywał swe umiejętności, by zadziwić i zainteresować uczniów lekcją. Po raz pierwszy jego sztuczka została opublikowana w książce Wallaca Lee „Wallace Lee's Magic Studio". Od tego czasu pierwotna „five card trick", wykorzystująca zwykłą 52-kartową talię, doczekała się wielu odmian, począwszy od omówionego rozszerzenia na talię 124-kartową, przez ogólny przypadek k kart, wersję, gdy część kart może leżeć odwrócona, lub możliwość chowania więcej niż jednej karty. Aby poznać więcej wersji, polecam zapoznanie się z artykułem „Fitch Cheney's Five Card Trick" w *Mathematical Association of America Math Horizons* z lutego 2003 r.