Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 561 ($WT = 1{,}25$) i 562 ($WT = 2{,}68$) z numeru 5/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	42,80
Marcin Kasperski	Warszawa	42,50
Marek Prauza	Poraj	39,95
Zbigniew Galias	Kraków	39,34
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,42
Adam Woryna	Ruda Śląska	35,24

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 573, 574

Redaguje Marcin E. KUCZMA

573. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki ciąg arytmetyczny liczb naturalnych $(a_1, \ldots, a_n)$ oraz taki ciąg geometryczny liczb naturalnych $(b_1, \ldots, b_n)$, że

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n < a_n.$$

574. W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan jest foremny.

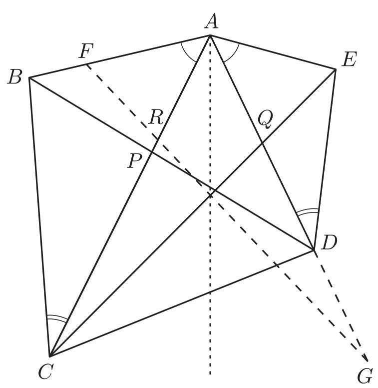
Zadanie 574 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

565. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle EDA|$, przy czym $|AB| > |AE|$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że odcinki AP i AQ mają jednakową długość wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i ADE.

566. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3 i niech $n = (4^p - 1)/3$. Wykazać, że liczba $2^{n-1} - 1$ jest podzielna przez n.



565. Z założeń wynika, że trójkąty ABC i AED są podobne; tak więc

$$\text{(1)} \qquad \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \qquad \frac{[ABC]}{[AED]} = \left(\frac{|AC|}{|AD|}\right)^2$$

($[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ). Warunek: „$[ACD]$ jest średnią geometryczną $[ABC]$ i $[AED]$” przepisujemy jako zależność $[ABC] : [ACD] = [ACD] : [AED]$. Po pomnożeniu stronami przez $[ABC] : [ACD]$ i uwzględnieniu drugiej równości (1) warunek ten przybiera postać

$$\left(\frac{[ABC]}{[ACD]}\right)^2 = \left(\frac{|AC|}{|AD|}\right)^2.$$

Skoro zaś $[ABC] : [ACD] = |BP| : |PD|$, uzyskany warunek jest równoważny zachodzeniu równości

$$\text{(2)} \qquad \frac{|BP|}{|PD|} = \frac{|AC|}{|AD|}.$$

Należy wykazać, że proporcja (2) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|AP| = |AQ|$.

Na półprostych $AB^{\to}$, $AC^{\to}$, $AD^{\to}$ zaznaczamy odpowiednio takie punkty F, R, G, że $|AF| = |AE|$, $|AR| = |AQ|$, $|AG| = |AC|$. Skoro $|AB| > |AE|$, to punkt F leży między A i B, a punkt D leży między A i G, i żadne z tych punktów się nie pokrywają. Punkty F, R, G są współliniowe, jako obrazy punktów E, Q, C w symetrii względem dwusiecznej kąta CAD. Dyskutowany warunek „$|AP| = |AQ|$”, czyli „$P = R$”, jest więc równoważny współliniowości punktów F, P, G – czyli spełnieniu równości

$$\text{(3)} \qquad \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|DG|}{|GA|} = 1$$

(twierdzenie Menelausa dla trójkąta ABD).

Przekształcamy lewą stronę (3), korzystając w ostatnim kroku z pierwszego związku (1):

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|DG|}{|GA|} = \frac{|AE|}{|AB| - |AE|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|AC| - |AD|}{|AC|} =$$
$$= \left(\frac{|AB|}{|AE|} - 1\right)^{-1} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \left(1 - \frac{|AD|}{|AC|}\right) = \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|AD|}{|AC|}.$$

Otrzymana równość dowodzi, że istotnie warunki (2) i (3) są równoważne.

566. W myśl małego twierdzenia Fermata, liczba $3(n-1) = 4^p - 4$ dzieli się przez p. Zatem także $n-1$ dzieli się przez p; iloraz jest liczbą parzystą (bo n jest nieparzysta). Tak więc $n - 1 = 2kp$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Oznaczmy: $2^p - 1 = u$, $2^p + 1 = v$; są to liczby względnie pierwsze. Z zależności

$$2^{n-1} = (2^p)^{2k} = \begin{cases} (u+1)^{2k} \equiv 1 \pmod{u} \\ (v-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{v} \end{cases}$$

wnosimy, że liczba $2^{n-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn $uv = 3n$, więc i przez n.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 460 ($WT = 1{,}75$) i 461 ($WT = 2{,}43$) z numeru 6/2008

Krzysztof Magiera	Łosiów	26,16
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,36
Radosław Poleski	Kołobrzeg	22,24
Tomasz Wietecha	Tarnów	21,45

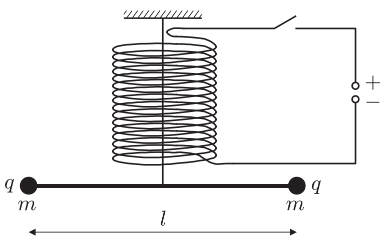
Zadania z fizyki nr 470, 471

Redaguje Jerzy B. BROJAN

470. Wagon o długości l jechał ze stałą prędkością po torze początkowo prostoliniowym, który począwszy od pewnego punktu przechodzi w łuk okręgu o promieniu znacznie większym od l, bez przechyłu bocznego. Wózki wagonu są rozmieszczone w odległości d od jego środka, ich rozmiary są małe, a masa wagonu jest rozłożona równomiernie wzdłuż jego długości. Niech F_1 będzie wartością siły poziomej działającej na szynę ze strony pierwszego wózka po jego wejściu w łuk, gdy drugi wózek jeszcze poruszał się po prostej, natomiast F_2 – wartością tej siły, gdy cały wagon znalazł się na łuku. Jeśli $F_1 = \frac{3}{4}F_2$, to jaki wynika stąd wniosek na temat stosunku d do l?

471. Wzdłuż osi pionowo ustawionej długiej zwojnicy wisi nić, a na nici – poziomy pręt z dwiema kulkami na końcach (rys. 1). Promień zwojnicy jest równy r, liczba zwojów na jednostkę jej długości – n, długość pręta – l, ładunek każdej z kulek – q, masa kulki – m, a masę samego pręta można pominąć. Jeśli nić nie wywiera na pręt żadnego momentu siły, to jakim wzorem jest dana prędkość kątowa, jaką uzyska pręt po włączeniu zasilania zwojnicy prądem stałym o natężeniu I?

Czy zjawisko to da się praktycznie zaobserwować przy realnych wartościach wszystkich danych?



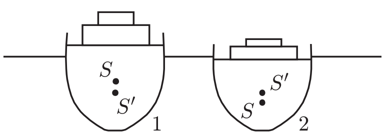
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

462. Dwa statki spoczywają obok siebie na morzu. Jeśli nie ma żadnego wiatru ani prądów wody, to czy oddziaływanie grawitacyjne spowoduje zbliżenie do siebie statków (choćby bardzo powolne)? Czy odpowiedź może zależeć od rozkładu masy wewnątrz statków?

463. Kulisty balonik zawiera lekki gaz i dzięki temu unosi się w powietrzu w stanie równowagi. Jego powłoka rozciąga się sprężyście, a energia sprężystości jest proporcjonalna do powierzchni balonika (wtedy nadwyżka ciśnienia we wnętrzu jest odwrotnie proporcjonalna do promienia balonika – faktu tego nie trzeba dowodzić). Jak zareaguje balonik – uniesie się do góry, opadnie, czy pozostanie w równowadze – gdy temperatura wzrośnie, pozostając jednakowa wewnątrz i na zewnątrz? Jak zareaguje na wzrost ciśnienia zewnętrznego? Jaki powinien być związek między temperaturą a ciśnieniem zewnętrznym, aby przy ich zmianie balonik pozostawał w równowadze? Powłoka jest cienka, a jej właściwości sprężyste nie zmieniają się z temperaturą.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny statków: S – środek masy statku, S' – środek masy wypartej wody.

462. Jeśliby zastąpić statek taką samą masą wody, to wypełniłaby wnękę po wypartej wodzie równo do jej poziomu i w stanie równowagi działająca na nią siła wypadkowa byłaby równa zeru. Zatem na pustą wnękę działa taka siła ze strony otaczającej wody, jakby była to „masa ujemna” – odpychana przez pole grawitacyjne (taki jest sens prawa Archimedesa). Stąd w pewnym uproszczeniu (wynikającym z niesferycznego rozkładu masy) każdy ze statków można zastąpić jego masą umieszczoną w środku masy plus taką samą masą ujemną umieszczoną w środku masy wypartej wody, co w sumie daje pionowo zorientowany „dipol grawitacyjny”. Oddziaływanie statków na siebie jest sumą dwóch sił przyciągających (masa dodatnia działa na dodatnią, ujemna na ujemną) i dwóch odpychających (na krzyż). Jeśli środek masy S' wypartej wody leży u obu statków na tej samej wysokości, a środek masy statków S leży powyżej S' (tak jest najczęściej, zob. rys. 2), to oddziaływanie odpychające pochodzi od mas nieco bardziej odległych od siebie, a ponadto te siły nie są skierowane poziomo, lecz ukośnie, więc ich poziome składowe są mniejsze i przyciąganie przeważa. Nietrudno wykazać, że tak samo jest dla wszystkich przypadków, gdy zwroty dipoli są zgodne, natomiast gdy jeden statek jest „typu 1”, a drugi „typu 2” (rys. 2), to przeważa odpychanie.

463. Wprowadźmy oznaczenia: r – promień balonika, V – jego objętość, n – liczba moli gazu wewnątrz, M – masa molowa tego gazu, p – ciśnienie wewnątrz, M' – masa molowa powietrza, p' – ciśnienie powietrza, m – masa powłoki, σ – współczynnik we wzorze na nadwyżkę ciśnienia $p - p' = \sigma/r$. Po skorzystaniu ze wzoru na gęstość gazu doskonałego $\varrho = pM/RT$ warunek równowagi balonika $V(\varrho' - \varrho) = m$ można przekształcić do postaci

$$(1)\qquad n(M' - M) = m + \frac{\sigma M'}{RT}\frac{V}{r} = m + \frac{\sigma M'}{RT}\frac{4}{3}\pi r^2,$$

co po pomnożeniu obu stron przez przyspieszenie ziemskie można interpretować jako równowagę „czystej” siły wyporu (po lewej stronie) i ciężaru powłoki powiększonego o wielkość wynikającą z nadwyżki ciśnienia (po prawej). Równoważną postacią tego równania jest

$$(2)\qquad n(M' - M) = m + \frac{\sigma n M'}{p'r + \sigma}.$$

Promień balonika zależy od ciśnienia zewnętrznego i temperatury zgodnie z równaniem III stopnia

$$(3)\qquad \left(p' + \frac{\sigma}{r}\right)\frac{4}{3}\pi r^3 = nRT.$$

Nawet bez rozwiązywania tego równania widzimy, że wzrost temperatury (bez zmiany p') powoduje wzrost promienia balonika, a stąd spadek wartości prawej strony równania (2) – balonik się uniesie. Wzrost ciśnienia zewnętrznego (bez zmiany T) powoduje natomiast spadek promienia r, czyli spadek wartości prawej strony równania (1), co także oznacza uniesienie się balonika. Jeśli balonik ma pozostać w równowadze, to stały musi być iloczyn $p'r$ (z równania (2)), a podstawiając $r = \mathrm{const}/p'$ do (3), otrzymujemy szukany związek między ciśnieniem zewnętrznym a temperaturą

$$Tp'^2 = \mathrm{const}.$$