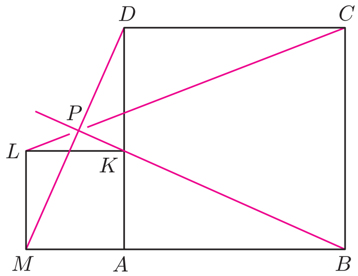
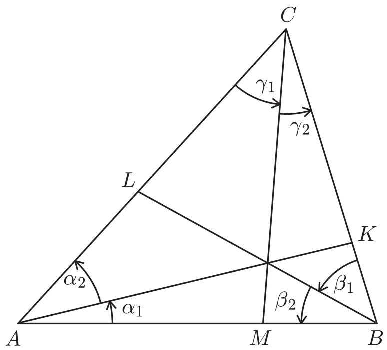
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

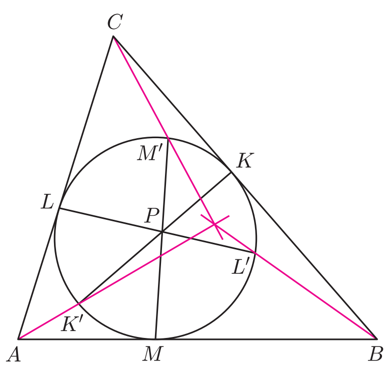
www.sem.edu.pl



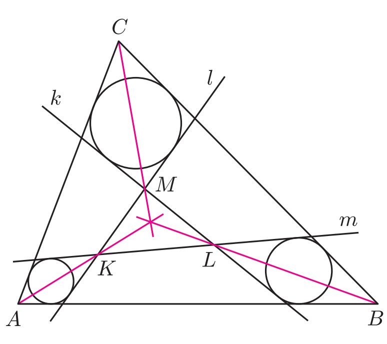
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. K, L, M to punkty styczności, P – obrany dowolnie.



Rys. 4. k, l i m są styczne do okręgów.

Na najnowszym plakacie SEM widnieje dwanaście konfiguracji geometrycznych, których wspólną cechą jest to, że narysowane czerwone proste przecinają się w jednym punkcie (zob. okładka). W niniejszym tekście proponujemy cztery metody, które można wykorzystać do dowodu tej własności, jak również wskazówki ułatwiające ich zastosowanie.

• Rozwiązując zadania, których ilustrację stanowi pierwszy wiersz plakatu, warto pamiętać o tym, kiedy na czworokącie wypukłym można opisać okrąg.

Spójrzmy na środkowy z rysunków pierwszego wiersza plakatu (i również na rysunek 1). Aby wykazać, że proste MD, BK i CL przecinają się w jednym punkcie, należy zauważyć, iż punkt P, w którym przecinają się proste MD i BK, leży jednocześnie na okręgu opisanym na kwadracie $ABCD$ oraz na okręgu opisanym na kwadracie $AKLM$. Wówczas $\sphericalangle LPM = \sphericalangle LAM = 45°$ (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku). Podobnie $\sphericalangle DPC = \sphericalangle DAC = 45°$. Stąd $\sphericalangle LPM = \sphericalangle DPC$, czyli punkty L, P, C są współliniowe.

• W kolejnych trzech zadaniach przydaje się trygonometryczna wersja twierdzenia Cevy, w której klasyczny warunek dotyczący długości wektorów jest zastąpiony przez warunek wiążący sinusy pewnych kątów:
jeśli w trójkącie ABC punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych BC, CA i AB, to proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1,$$

gdzie kąty α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 są kątami skierowanymi odpowiednio między półprostymi AB i AK, AK i AC, BC i BL, BL i BA, CA i CM oraz CM i CB (rys. 2).

Spójrzmy teraz na środkowy rysunek drugiego wiersza plakatu (i rysunek 3). Aby wykazać, że proste AK', BL' oraz CM' przecinają się w jednym punkcie, wystarczy skorzystać z tego twierdzenia dla trójkątów AML, MBK, LKC, MKL i odpowiednio punktów K', L', M' oraz P. Tezę otrzymamy po kilku przekształceniach i uwzględnieniu równości kątów.

• Rozwiązanie zadań, znajdujących się na plakacie w trzecim wierszu, ułatwia następujący fakt:
jeśli dwa trójkąty mają boki odpowiednio równoległe, to można je nałożyć za pomocą jednokładności lub przesunięcia.

Spójrzmy na środkowy rysunek trzeciego wiersza plakatu (i rysunek 4). Przytoczony fakt wykorzystamy, aby wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie. W tym celu musimy znaleźć dwa trójkąty o odpowiednich bokach równoległych. Pierwszym z nich będzie trójkąt ABC. Drugi powstanie poprzez poprowadzenie stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt KLM, równoległych do boków pierwszego trójkąta. Wykorzystując jednokładności o środkach w punktach K, L i M, należy zauważyć, że każdy wierzchołek nowego trójkąta leży na jednej z interesujących nas prostych AK, BL i CM.

• Ostatnie trzy konfiguracje stanowią szczególne przypadki twierdzenia Brianchona:
w sześciokącie opisanym na okręgu główne przekątne przecinają się w jednym punkcie,
co ilustruje prawy rysunek ostatniego rzędu plakatu.

Powyższe twierdzenie zachodzi także, gdy kąty przy niektórych wierzchołkach sześciokąta mają miarę 180°. Dwa takie „zdegenerowane” przypadki – trójkąt i czworokąt – przedstawione zostały na plakacie. Narysujcie, jak będzie to wyglądało dla pięciokąta.

Joanna ZAKRZEWSKA