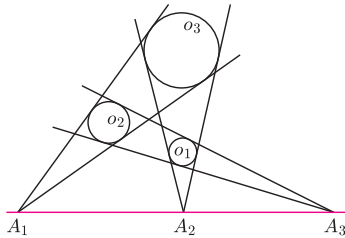
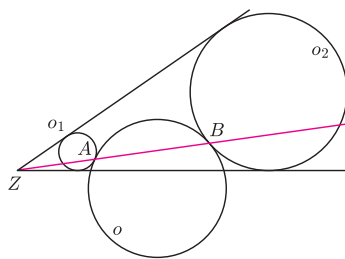




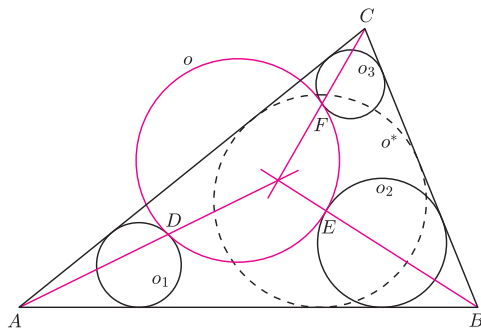
Jednokładność o skali dodatniej (prostą) oznaczamy \mathcal{J}^+ , o skali ujemnej zaś (odwrotną) \mathcal{J}^- .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wykonanie rysunku pozostawiam Czytelnikowi.

Dowód twierdzenia o prostej Eulera można znaleźć w poprzednim deltoidezie.

Dobrze się składa

Joanna JASZUŃSKA

Tematem styczniowego *deltoidea* były jednokładności. Przypomnijmy, że *jednokładność* o środku O i skali $k \neq 0$ to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Fakt. Dla nieprzystających okręgów o_1 i o_2 istnieje dokładnie jedna jednokładność taka, że $\mathcal{J}^+(o_1) = o_2$, oraz dokładnie jedna taka, że $\mathcal{J}^-(o_1) = o_2$.

Zachodzi następujące miłe twierdzenie, dowód pozostawiam jako zadanie.

Twierdzenie. Złożenie dwóch jednokładności jest albo jednokładnością o skali będącej iloczynem wyjściowych skal i środku współliniowym ze środkami składanych jednokładności, albo przesunięciem, jeśli iloczyn wyjściowych skal jest równy 1.

Skoro jednokładności tak dobrze się składa, zobaczymy kilka zastosowań.

1. Okręgi o_1, o_2, o_3 są rozłączne zewnątrz. Te dwie styczne do o_1 i o_2 , które nie rozdzielają tych okręgów, przecinają się w punkcie A_3 . Analogicznie definiujemy punkty A_1 i A_2 (rys. 1). Wykaż, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.

R. Punkty A_1, A_2 i A_3 są środkami jednokładności $\mathcal{J}_{A_1}^+, \mathcal{J}_{A_2}^+$ i $\mathcal{J}_{A_3}^+$ takich, że $\mathcal{J}_{A_1}^+(o_2) = o_3, \mathcal{J}_{A_2}^+(o_3) = o_1$ oraz $\mathcal{J}_{A_3}^+(o_2) = o_1$. Złożenie $\mathcal{J}_{A_2}^+ \circ \mathcal{J}_{A_1}^+$ to jednokładność prosta i $\mathcal{J}_{A_2}^+ \circ \mathcal{J}_{A_1}^+(o_2) = \mathcal{J}_{A_2}^+(o_3) = o_1$. Stąd jej środkiem, który na mocy twierdzenia musi leżeć na prostej A_1A_2 , jest na mocy faktu punkt A_3 . \square

2. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnątrz i wpisane w kąt o wierzchołku Z . Okrąg o jest styczny zewnątrz do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B (rys. 2). Udowodnij, że punkty A, B, Z są współliniowe.

R. Rozważmy jednokładności \mathcal{J}_A^- i \mathcal{J}_B^- takie, że $\mathcal{J}_A^-(o_1) = o$ oraz $\mathcal{J}_B^-(o) = o_2$. Jednokładność $\mathcal{J}_B^- \circ \mathcal{J}_A^-$ jest prosta oraz $\mathcal{J}_B^- \circ \mathcal{J}_A^-(o_1) = \mathcal{J}_B^-(o) = o_2$, więc jej środkiem musi być punkt Z . Leży on zatem na prostej AB . \square

3. Okręgi o_1, o_2, o_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC . Okrąg o jest styczny zewnątrz do okręgów o_1, o_2, o_3 odpowiednio w punktach D, E, F (rys. 3). Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

R. Niech o^* będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC . Istnieje \mathcal{J}_D^- taka, że $\mathcal{J}_D^-(o) = o_1$, oraz \mathcal{J}_A^+ taka, że $\mathcal{J}_A^+(o_1) = o^*$, wtedy $\mathcal{J}_A^+ \circ \mathcal{J}_D^-(o) = o^*$. Złożenie $\mathcal{J}_A^+ \circ \mathcal{J}_D^-$ jest więc jednokładnością odwrotną, przeprowadzającą o na o^* (istnieje dokładnie jedna, nawet jeśli o i o^* są przystające lub równe). Stąd jej środek leży na prostej AD . Analogicznie, leży też na prostych BE i CF . \square

4. Czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest wpisany w okrąg o środku O . Punkty H_1, H_2, H_3, H_4 to ortocentra trójkątów, odpowiednio, $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Wykaż, że czworokąty $A_1A_2A_3A_4$ i $H_1H_2H_3H_4$ są przystające.

R. Niech punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będą środkami ciężkości odpowiednio powyższych czterech trójkątów, S zaś – środkiem ciężkości czwórki punktów A_1, A_2, A_3, A_4 . Z własności środków ciężkości, dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$ punkty S_i, S, A_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SA_i = 3 \cdot SS_i$, zatem $\mathcal{J}_S^{-3}(S_i) = A_i$. Z twierdzenia o prostej Eulera, dla każdego i punkty O, S_i, H_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SH_i = 2 \cdot SO$, stąd $\mathcal{J}_O^{1/3}(H_i) = S_i$. Złożenie $\mathcal{J}_S^{-3} \circ \mathcal{J}_O^{1/3}$ to jednokładność o skali $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ (symetria środkowa), która przeprowadza $H_1H_2H_3H_4$ na $A_1A_2A_3A_4$. Zatem czworokąty te są przystające. \square

Poniższe zadanie pochodzi z L Olimpiady Matematycznej.

5. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF . Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Okręgi wpisane w trójkąty AEF i DEF są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie na stronie www.om.edu.pl