Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 599, 600

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2010

599. W każde pole kwadratowej tabeli o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geqslant 4$, została wpisana liczba $+1$ lub -1. Każdemu zbiorowi n pól, zawierającemu po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, przyporządkowujemy iloczyn liczb wpisanych w te pola. Dowieść, że suma uzyskanych iloczynów dzieli się przez 4.

600. Dwusieczne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Dowieść, że punkty D', E', F', H leżą na jednym okręgu.

Zadanie 600 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2009

Przypominamy treść zadań:

591. Liczby naturalne a, b, c są związane zależnością
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$
Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem tych liczb. Dowieść, że iloczyn $abcd$ jest kwadratem liczby naturalnej.

592. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery opisane na czworościanach $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od P). Udowodnić, że
$$\frac{|AP|}{|AK|} \cdot \frac{|BP|}{|BL|} \cdot \frac{|CP|}{|CM|} \cdot \frac{|DP|}{|DN|} \leqslant \frac{1}{256}.$$

591. Pisząc $a = xd$, $b = yd$, $c = zd$, widzimy, że liczby naturalne x, y, z także spełniają równanie $1/x + 1/y = 1/z$, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 1; przy tym $x > z$, $y > z$. Przekształcamy to równanie do postaci $xz + yz = xy$, czyli
$$(x-z)(y-z) = z^2.$$
Gdyby różnice w nawiasach miały wspólny dzielnik pierwszy, musiałby on być zarazem dzielnikiem liczby z, a to jest niemożliwe. Różnice te są więc dodatnimi liczbami względnie pierwszymi. Ich iloczyn jest równy z^2, zatem każda z nich jest kwadratem liczby naturalnej.

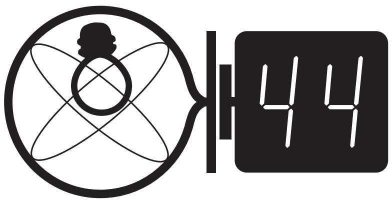
Mnożymy równość $yz = xy - xz$ stronami przez xd^4 i otrzymujemy
$$abcd = x^2 d^4 (y-z).$$
Stąd już wynika teza, bo $y - z$ jest kwadratem liczby naturalnej.

592. Zastosujmy przestrzenną inwersję o środku P (i dowolnym promieniu). Niech A^*, B^*, C^*, D^* będą obrazami punktów A, B, C, D. Leżą one na półprostych $PA^{\rightarrow}$, $PB^{\rightarrow}$, $PC^{\rightarrow}$, $PD^{\rightarrow}$, więc punkt P leży wewnątrz czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Objętości czworościanów $PB^*C^*D^*$, $PC^*D^*A^*$, $PD^*A^*B^*$, $PA^*B^*C^*$ oznaczmy odpowiednio przez V_a, V_b, V_c, V_d; ich suma jest równa objętości V czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Obrazem sfery przechodzącej przez punkty P, B, C, D jest płaszczyzna $B^*C^*D^*$. Ta sfera przechodzi także przez punkt K, więc jego obraz K^* leży na płaszczyźnie $B^*C^*D^*$. Punkt P leży na odcinku AK; leży zatem również na odcinku A^*K^*. Punkty P oraz A^* są wierzchołkami ostrosłupów o wspólnej podstawie $B^*C^*D^*$. Zachodzi więc proporcja $|K^*P| : |K^*A^*| = V_a : V$. W takim razie
$$\frac{|PA^*|}{|PK^*|} = \frac{|K^*A^*| - |K^*P|}{|K^*P|} = \frac{|K^*A^*|}{|K^*P|} - 1 = \frac{V}{V_a} - 1.$$
Z własności inwersji wynika, że $|PK| \cdot |PK^*| = |PA| \cdot |PA^*|$. Wobec tego
$$\frac{|AK|}{|AP|} = \frac{|AP| + |PK|}{|AP|} = 1 + \frac{|PK|}{|PA|} = 1 + \frac{|PA^*|}{|PK^*|} = \frac{V}{V_a}.$$
Analogicznie wyrażają się stosunki $|BL| : |BP|$, $|CM| : |CP|$, $|DN| : |DP|$. W rezultacie
$$\frac{|AP|}{|AK|} + \frac{|BP|}{|BL|} + \frac{|CP|}{|CM|} + \frac{|DP|}{|DN|} = \frac{V_a}{V} + \frac{V_b}{V} + \frac{V_c}{V} + \frac{V_d}{V} = 1.$$
Zastosowanie nierówności między średnimi daje tezę zadania.

Klub 44

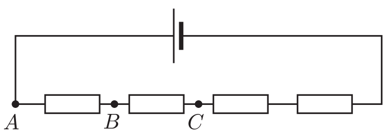


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2010

Zadania z fizyki nr 496, 497

Redaguje Jerzy B. BROJAN

496. Do źródła stałego napięcia dołączono 4 jednakowe oporniki połączone szeregowo. Gdy następnie dołączono pewien woltomierz do punktów A i B (rys. 1), wskazał on napięcie 3 V, a pomiar napięcia między A i C tym samym woltomierzem dał wynik 5 V. Ile wynosi napięcie źródła?



Rys. 1

497. Zbiornik o objętości V łączymy z cylindrem o początkowej objętości $2V$ na trzy sposoby:

(a) ścianką przewodzącą ciepło (rys. 2),
(b) rurką tak wąską, że ciśnienie po obu stronach po pewnym czasie się wyrównuje, natomiast temperatura – nie (rys. 3),
(c) przegrodą, która po otwarciu pozwala na wyrównanie się zarówno ciśnień, jak i temperatur.

Rys. 2

Rys. 3

Poza ścianką z przypadku (a) inne ścianki naczyń nie wymieniają ciepła z wypełniającym wnętrze gazem doskonałym, którego początkowe ciśnienie p_0 i temperatura T_0 były jednakowe. Sprężono gaz w cylindrach do objętości V:

(a) tak szybko, że ciepło nie zdążyło przepłynąć przez ściankę (ale tak wolno, że przemiana była odwracalna – opisana wzorem $pV^\gamma = \mathrm{const}$), a następnie zaczekano na wyrównanie się temperatur,
(b) tak szybko, że gaz nie zdążył przepłynąć rurką (ale... jak wyżej), a następnie zaczekano na wyrównanie się ciśnienia.
(c) po czym otwarto przegrodę, a następnie ją zamknięto.

Następnie cofnięto w opisany sposób tłoki do poprzedniego położenia i doprowadzono do wyrównania temperatury (w przypadku (a)) lub ciśnienia (b), lub obu (c). Jaką temperaturę osiągnął w każdym z tych przypadków gaz, jeśli $T_0 = 300$ K, wykładnik $\gamma = c_p/c_V$ ma wartość 1,4, a przedstawiony cykl powtórzono 10 razy?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 484 ($WT = 1{,}23$) i 485 ($WT = 3{,}93$) z numeru 10/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	36,89
Michał Koźlik	Gliwice	29,72
Jerzy Witkowski	Radlin	18,88

Rozwiązania zadań z numeru 12/2009

Przypominamy treść zadań:

488. Ciężarek o masie m wisi na nici, która owija się wokół dwóch nieważkich bloków ruchomych. Osie bloków są napięte sprężynkami o stałych sprężystości k_1 i k_2 (rys. 4). Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka wokół położenia równowagi.

489. Chemiczne oczyszczanie wzbogaconego uranu (tzn. zawierającego podwyższony procent rozszczepialnego izotopu ^{235}U, stosowanego w reaktorach jądrowych) może być przeprowadzane w zbiorniku z cieczą, w którym oczyszczony tlenek uranu opada na dno. Ciepło wytwarzane przez reakcję chemiczną jest odprowadzane przez wodę otaczającą zbiornik. W pewnym zakładzie stosującym tę technologię doszło do dość poważnego wypadku, gdy oczyszczano uran wzbogacony nie – jak zwykle – do 3%, ale do 19% (tak wysoko wzbogacony uran jest stosowany w reaktorach wysokotemperaturowych). Przyczyną wypadku było zaniedbanie polegające na przetwarzaniu tej samej ilości materiału, co zwykle, mimo wyższej zawartości izotopu rozszczepialnego. Uran osadzający się na dnie zbiornika przekroczył wskutek tego masę krytyczną i rozpoczęła się reakcja łańcuchowa, która trwała w sposób samoczynnie kontrolowany przez 17 godzin. Jakie zjawiska fizyczne lub chemiczne mogły być odpowiedzialne za kontrolowany przebieg reakcji, która nie rozwinęła się do skali wybuchu?

488. Załóżmy, że oś dolnego bloku przesunie się w górę o x_1, a oś górnego – w dół o x_2. Z niezmienionej łącznej długości nitki wynika wtedy wartość przesunięcia ciężarka w dół

$$x = 2x_1 + 2x_2.$$

Jeśli oznaczymy siłę napięcia nici przez F, to sprężynki napięte są jednakową siłą $2F$, czyli

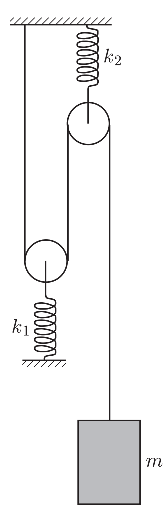
$$2F = k_1x_1 = k_2x_2.$$

Eliminując x_1 i x_2, wyznaczamy związek między F a x:

$$F = \frac{k_1k_2}{4(k_1+k_2)}x.$$

Współczynnik przed x po prawej stronie jest efektywną stałą sprężystości układu, tzn. ciężarek drga tak, jakby wisiał na sprężynie o stałej sprężystości

$$k = \frac{k_1k_2}{4(k_1+k_2)}.$$



Rys. 4

Okres drgań jest równy $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.
(Dość podobne było przed 7 laty zadanie 348.)

489. Jednym z tych zjawisk mogło być to, że powstające ciepło wywołało konwekcję w cieczy wypełniającej zbiornik, mieszanie się osadu i zmniejszenie gęstości uranu. Drugim – wrzenie wody chłodzącej i zmniejszenie wskutek tego jej gęstości. Ponieważ woda ta faktycznie zaczęła pełnić rolę moderatora (spowalniacza neutronów), więc to również przyczyniało się do zahamowania reakcji jądrowej.

Opisywany wypadek miał miejsce w zakładzie Tokai-Mura w Japonii w 1999 roku i pociągnął za sobą 2 ofiary śmiertelne, wskutek napromieniowania.