# Kolorowe szachownice

*Joanna JASZUŃSKA*

O szachownicach była mowa również w *deltoidzie* 7/2009.

Wszystkie klocki lub kostki układamy zawsze zgodnie z liniami podziału na pola, tak by żaden klocek nie wystawał poza rozważany obszar i by żadne dwa na siebie nie nachodziły.

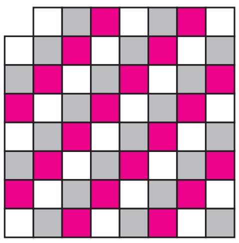
Szachownicę często warto pokolorować. Prócz „tradycyjnej” czarno-białej kratki, czasem przydaje się wzorek bardziej wyrafinowany. Oto przykłady zadań.

**1.** Czy szachownicę $8 \times 8$, z której usunięto dwa przeciwległe narożne pola, można pokryć kostkami domina $2 \times 1$?

**R.** Nie, bo każda kostka przykrywa jedno pole białe i jedno czarne. Skoro usunięto dwa pola tego samego koloru, zostało mniej pól jednego koloru niż drugiego. □

**2.** Na każdym polu szachownicy $7 \times 7$ siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

**R.** Jest więcej pól w jednym z kolorów, powiedzmy czarnym. Żaby z tych pól muszą po skoku zmieścić się na mniejszej liczbie pól białych, bo każda żaba, skacząc, zmienia kolor pola. Stąd na któreś białe pole trafią przynajmniej dwie żaby. □



Rys. 1

**3.** Wykaż, że szachownicy $10 \times 10$ nie można pokryć 25 klockami w kształcie ⊞.

**R.** Jest tyle samo pól białych i czarnych. Każdy klocek pokrywa trzy pola jednego koloru i jedno drugiego, więc do pokrycia potrzeba parzystej liczby klocków. □

**4.** W środkowym z 27 sześcianików kostki $3 \times 3 \times 3$ siedzi kornik. Czy może on odwiedzić każdy sześcianik dokładnie raz, przechodząc zawsze przez ściankę?

**R.** Pokolorujmy kostkę w „trójwymiarową szachownicę”. Wtedy kornik przy każdym przejściu przez ściankę zmienia kolor pola. Startuje z pola w tym kolorze, którego jest mniej, więc nie zdoła odwiedzić wszystkich. □

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

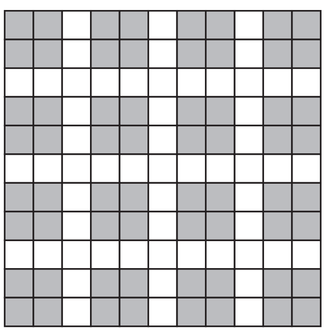
Rys. 2

**5.** Z szachownicy $8 \times 8$ wycięto narożne pole. Czy da się ją pokryć klockami $3 \times 1$?

**R.** Nie. Na szachownicy z rysunku 1 jest inna liczba pól w każdym z 3 kolorów, tymczasem każdy klocek przykrywa po jednym polu każdego koloru. □

**6.** Na szachownicy $8 \times 8$ ułożono 21 klocków $3 \times 1$. Które pole zostało puste?

**R.** Wpiszmy w pola szachownicy liczby, jak na rysunku 2. Każdy klocek pokrywa pola o łącznej sumie liczb 2, zatem 21 klocków razem pokrywa pola o sumie 42. Suma wszystkich wpisanych liczb jest równa 44, więc puste musi zostać któreś pole z 2. Pozostawiam Czytelnikom łatwe sprawdzenie, że taki układ jest możliwy. □



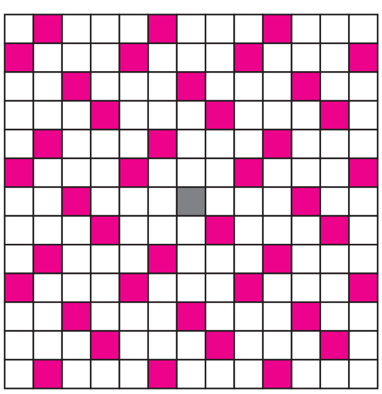
Rys. 3

**7.** Czy szachownicę $8 \times 9$ można pokryć klockami $2 \times 2$?

**R.** Nie. Pokolorujmy pola o obu współrzędnych nieparzystych. Każdy klocek $2 \times 2$ pokrywa dokładnie jedno z nich, więc do pokrycia całej szachownicy potrzeba co najmniej 20 klocków. Nie zmieszczą się, bo $20 \cdot 2 \cdot 2 > 8 \cdot 9$. □

**8.** Na szachownicy o wymiarach $11 \times 11$ ułożono 15 klocków $2 \times 2$. Wykaż, że można zmieścić jeszcze jeden taki klocek.

**R.** Każdy klocek ma wspólne pola z dokładnie jednym z 16 szarych kwadratów $2 \times 2$ z rysunku 3. Któryś kwadrat zostaje zatem wolny i można na nim umieścić szesnasty klocek. □



Rys. 4

**9.** (Zawody *Baltic Way 98*). Z szachownicy $13 \times 13$ wycięto środkowe pole. Czy otrzymaną figurę da się pokryć 42 klockami $4 \times 1$?

**R.** Nie. Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku 4. Każdy klocek pokrywa jedno pole kolorowe i trzy białe. Kolorowych pól jest tylko 41. □

---

Zadania domowe:

**10.** Czy szachownicę $10 \times 10$ da się pokryć klockami $4 \times 1$?

**11.** Czy szachownicę $8 \times 8$, z której usunięto dwa pola różnych kolorów, można pokryć kostkami domina $2 \times 1$?

**12.** (*XLVI OM*). Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n$, dla których szachownicę $n \times n$ można pokryć klockami, z których każdy ma wymiary $2 \times 2$ lub $3 \times 3$.

*Wskazówka.* Rozważ pokolorowanie w „zebrę” (wiersze na przemian czarne i białe).