Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 591 ($WT = 1{,}74$) i 592 ($WT = 3{,}40$) z numeru 12/2009

Witold Bednarek	Łódź	44,76
Tomasz Wietecha	Tarnów	43,75
Adam Woryna	Ruda Śl.	43,72
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,10

Witold Bednarek – obecny z nami od narodzin Ligi (!) – zgromadził „44” po raz piąty.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2010

Przypominamy treść zadań:

599. W każde pole kwadratowej tabeli o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geqslant 4$, została wpisana liczba $+1$ lub -1. Każdemu zbiorowi n pól, zawierającemu po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, przyporządkowujemy iloczyn liczb wpisanych w te pola. Dowieść, że suma uzyskanych iloczynów dzieli się przez 4.

600. Dwusieczne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Dowieść, że punkty D', E', F', H leżą na jednym okręgu.

599. Dowolny zbiór n pól, zawierający po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, nazwijmy *zmyślnym*. Jest $n!$ takich zbiorów (tworząc zmyślny zbiór, wybieramy jedno spośród n pól pierwszego wiersza, jedno spośród $n-1$ pól drugiego wiersza itd.). Ponumerujmy zbiory zmyślne w dowolny sposób liczbami od 1 do $n!$. Niech P_i oznacza iloczyn liczb wpisanych w pola i-tego zbioru zmyślnego. Oczywiście $P_i = \pm 1$.

Każde pole tablicy występuje w dokładnie $(n-1)!$ zmyślnych zbiorach (bo dowolny zmyślny zbiór, zawierający wybrane pole, staje się – po usunięciu tego pola, wraz z całym wierszem i kolumną – zmyślnym zbiorem w powstałej tabeli $(n-1) \times (n-1)$). Liczba $(n-1)!$ jest parzysta, zatem iloczyn $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{n!}$ jest równy 1.

Przyjmijmy, że w ciągu $P_1, \ldots, P_{n!}$ wartość -1 występuje k razy. Skoro $\prod P_i = 1$, liczba k jest parzysta. W konsekwencji

$$P_1 + \ldots + P_{n!} = (n! - k) \cdot 1 + k \cdot (-1) = n! - 2k.$$

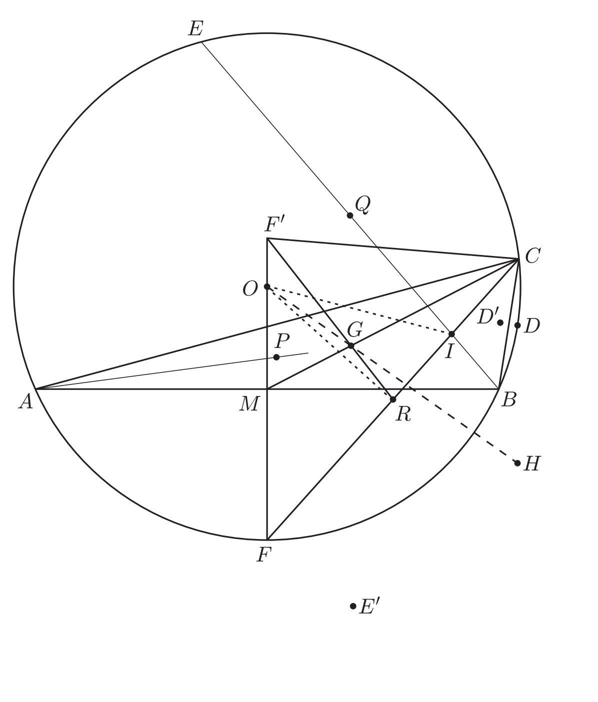
Jest to liczba podzielna przez 4, bo $n \geqslant 4$.

600. Gdy dwa boki – np. AC i BC – mają tę samą długość, wówczas $AH \parallel BF$ (oba odcinki prostopadłe do BC), podobnie $BH \parallel AF$ i czworokąt $AFBH$ jest rombem; zatem punkt F' pokrywa się z H i nie ma czego dowodzić. Dalej zakładamy, że trójkąt ABC nie jest równoramienny.

Niech P, Q, R będą odpowiednio środkami odcinków AD, BE, CF. Punkt F jest środkiem łuku AB, niezawierającego punktu C, więc prosta FF' jest symetralną boku AB. Oznaczmy wspólny środek prostopadłych odcinków AB i FF' przez M. W (niezdegenerowanym) trójkącie CFF' środkowe CM i $F'R$ przecinają się w jego środku ciężkości, który dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$. A ponieważ odcinek CM jest też środkową w trójkącie ABC, wynika stąd, że ów punkt przecięcia jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Analogiczne rozumowanie dla trójkątów ADD' i BEE' pokazuje, że ich środki ciężkości pokrywają się ze środkiem ciężkości G trójkąta ABC. Tak więc G dzieli każdy z odcinków $D'P$, $E'Q$, $F'R$ w stosunku $2:1$. Innymi słowy, punkty P, Q, R są obrazami punktów D', E', F' w jednokładności o środku G i skali $-1/2$.

Obrazem punktu H w tej samej jednokładności jest punkt O, środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (znany fakt, zresztą łatwy do udowodnienia). Aby uzyskać tezę zadania, wystarczy więc wykazać, że punkty O, P, Q, R leżą na jednym okręgu. To zaś jest oczywiste – jest to okrąg o średnicy OI, gdzie I oznacza punkt przecięcia odcinków AD, BE, CF (środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC). Przechodzi on przez punkty P, Q, R, które są wierzchołkami kątów prostych w trójkątach o przeciwprostokątnej OI.



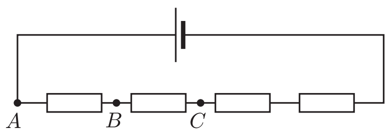
Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2010

Przypominamy treść zadań:

496. Do źródła stałego napięcia dołączono 4 jednakowe oporniki połączone szeregowo. Gdy następnie dołączono pewien woltomierz do punktów A i B (rys. 1), wskazał on napięcie 3 V, a pomiar napięcia między A i C tym samym woltomierzem dał wynik 5 V. Ile wynosi napięcie źródła?



Rys. 1

Rys. 2

Rys. 3

497. Zbiornik o objętości V łączymy z cylindrem o początkowej objętości $2V$ na trzy sposoby:

(a) ścianką przewodzącą ciepło (rys. 2),
(b) rurką tak wąską, że ciśnienie po obu stronach po pewnym czasie się wyrównuje, natomiast temperatura – nie (rys. 3),
(c) przegrodą, która po otwarciu pozwala na wyrównanie się zarówno ciśnień, jak i temperatur.

Poza ścianką z przypadku (a) inne ścianki naczyń nie wymieniają ciepła z wypełniającym wnętrze gazem doskonałym, którego początkowe ciśnienie p_0 i temperatura T_0 były jednakowe. Sprężono gaz w cylindrach do objętości V:

(a) tak szybko, że ciepło nie zdążyło przepłynąć przez ściankę (ale tak wolno, że przemiana była odwracalna – opisana wzorem $pV^\gamma = \text{const}$), a następnie zaczekano na wyrównanie się temperatur,
(b) tak szybko, że gaz nie zdążył przepłynąć rurką (ale… jak wyżej), a następnie zaczekano na wyrównanie się ciśnienia.
(c) po czym otwarto przegrodę, a następnie ją zamknięto.

Następnie cofnięto w opisany sposób tłoki do poprzedniego położenia i doprowadzono do wyrównania temperatury (w przypadku (a)) lub ciśnienia (b), lub obu (c). Jaką temperaturę osiągnął w każdym z tych przypadków gaz, jeśli $T_0 = 300$ K, wykładnik $\gamma = c_p/c_V$ ma wartość 1,4, a przedstawiony cykl powtórzono 10 razy?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 492 ($WT = 1{,}55$) i 493 ($WT = 3{,}67$) z numeru 2/2010

Michał Koźlik	Gliwice	38,31
Marian Łupieżowiec	Gliwice	36,55
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Jacek Piotrowski	Rzeszów	31,58
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	29,57
Jerzy Witkowski	Radlin	27,61
Tomasz Wietecha	Tarnów	17,10

496. Przyczyną tego, że drugie ze zmierzonych napięć (U_2) nie jest dwukrotnie większe od pierwszego (U_1), może być skończona wartość oporu własnego woltomierza. Oznaczmy ten opór jako R_V, a opór pojedynczego opornika jako R. Pozostawiamy Czytelnikowi wyprowadzenie równań

$$U_1 = \frac{UR_V}{3R + 4R_V}, \qquad U_2 = \frac{UR_V}{2(R+R_V)},$$

których rozwiązaniem jest

$$U = \frac{2U_1U_2}{2U_2 - 3U_1} = 30 \text{ V}.$$

497. Zgodnie z podanym równaniem przemiany adiabatycznej (równoważną postacią jest $V^{\gamma-1}T = \text{const}$) temperatura w cylindrach osiągnęła po sprężeniu wartość równą $T_1 = 2^{\gamma-1}T_0$. Dalej rozpatrujemy kolejno przypadki (a), (c) i (b).

(a) Ponieważ cylinder zawiera 2 razy więcej gazu niż zbiornik, więc temperatura po wyrównaniu wyniosła $T_2 = (2T_1 + T_0)/3$. Podczas rozprężenia temperatura w cylindrze spadła do wartości $T_3 = 2^{1-\gamma}T_2$, a ponownie wyrównana jej wartość jest dana wzorem $T_4 = (2T_3 + T_2)/3$. Stąd $T_4 = \frac{1}{9}(5 + 2^{2-\gamma} + 2^\gamma)T_0 = 1{,}0172\,T_0$, a po 10 cyklach dochodzimy do temperatury

$$1{,}0172^{10} \cdot T_0 = 1{,}186\,T_0.$$

(c) Obliczenie temperatur T_1, T_2 i T_3 nie odbiega od przypadku (a), jednak tym razem ilość gazu rozprężanego w cylindrze jest taka sama, jak pozostała w zbiorniku, więc

$$T_4 = \frac{T_3 + T_2}{2} = \frac{1}{6}(3 + 2^{1-\gamma} + 2^\gamma)T_0 = 1{,}066\,T_0.$$

Podniesienie mnożnika do potęgi 10 daje temperaturę $1{,}897\,T_0$.

(b) Wyznaczenie temperatur po wyrównaniu ciśnienia jest teraz o wiele bardziej pracochłonne. Należy najpierw przyrównać łączną energię wewnętrzną przed i po wyrównaniu ciśnień. Podstawmy energię wewnętrzną gazu w postaci $U = nC_VT = pVC_V/R$; ponieważ objętości są jednakowe, to wyrównane ciśnienie p_2 jest średnią arytmetyczną początkowego ciśnienia w zbiorniku p_0 i ciśnienia po sprężeniu w cylindrze p_1 (co skądinąd jest prawdą także dla przypadku (c))

$$p_2 = \frac{1}{2}(2^\gamma + 1)p_0.$$

Rozprężenie gazu w cylindrze (wynikające z wypływu przez rurkę) jest adiabatyczne, a korzystając z równania adiabaty w postaci

$$\frac{p^{1-1/\gamma}}{T} = \text{const}$$

i znając parametry początkowe p_1 i T_1 oraz p_2, wyznaczamy T_2. Jako ostatnią znajdujemy temperaturę T_2' gazu w zbiorniku, przy czym można oprzeć się na zachowaniu liczby moli, tzn.

$$\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2'}.$$

Cofnięcie tłoka obniży temperaturę w cylindrze według poprzedniego wzoru $T_3 = 2^{1-\gamma}T_2$, a dalej opisaną wyżej procedurę należy powtórzyć, z dwiema modyfikacjami: po pierwsze, wyrównane ciśnienie p_4 wyraża się przez ciśnienia w cylindrze p_3 i w zbiorniku p_2 z wagami odpowiadającymi objętościom, tzn.

$$p_4 = (2p_3 + p_2)/3,$$

a po drugie, rozprężenie adiabatyczne „przez rurkę" dotyczy teraz gazu pozostałego w zbiorniku. Całość obliczeń nadaje się chyba tylko do analizy numerycznej, a wynikiem po 10 cyklach jest temperatura $1{,}900\,T_0$ w cylindrze i $1{,}893\,T_0$ w zbiorniku. Ciekawe, że wyniki przypadków (b) i (c) są praktycznie identyczne, co wynika z faktu, że przepływ przez rurkę dość skutecznie wyrównuje temperaturę, a ponadto samo wyrównywanie temperatury ma niezbyt duży udział we wzroście entropii i ogrzewaniu gazu (por. wyniki (a) i (c)).